UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA V NITRE

FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED

NÁZORNOSŤ A MODELOVANIE VO VYUČOVANÍ ZLOMKOV

Gabriela Pavlovičová

Oľga Kupcová

Lucia Vargová

NITRA 2020

Názov: **Názornosť a modelovanie vo vyučovaní zlomkov**

Autori: doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
Mgr. Oľga Kupcová
PaedDr. Lucia Vargová, PhD.

Recenzent: doc. PaedDr. PhDr. Valéria Švecová, PhD.
PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

Edícia: Prírodovedec č.730

doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD. – Katedra matematiky FPV UKF v Nitre
Mgr. Oľga Kupcová – ZŠ sv. Ladislava v Topoľčanoch
PaedDr. Lucia Vargová, PhD. – Katedra matematiky FPV UKF v Nitre

Vydané s finančnou podporou grantu *VEGA 1/0149/18: Konceptualizácia pojmu zlomok vo vzťahu k osobnej potrebe štruktúry*

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-558-1638-8
EAN 9788055816388

OBSAH

PREDSLOV

Zlomky patria k jednému z najproblematickejších tematických celkov vo vyučovaní matematiky. Dokazujú to aj mnohé výskumné štúdie, ktoré poukazujú na problémy s porozumením pojmu zlomok. Čo je však príčinou nízkeho porozumenia zlomkom u žiakov, to zostáva otázne. V praxi sa často stretávame s tým, že napriek tomu, že žiaci ovládajú pravidlá pre počítanie so zlomkami, pri úlohe, ktorá obsahuje neštandardnú situáciu, zostávajú bezradní. Znamená to, že poznatky sú uložené iba ako pamäťové stopy bez vzťahu k už vytvorenej štruktúre vedomostí. Iní autori uvádzajú, že príčiny neporozumenia zlomkom žiakmi spočívajú v tom, že zlomok môžeme interpretovať viacerými spôsobmi.

V tejto publikácii sa venujeme možnosti zlepšiť porozumenie zlomkom u žiakov v rámci vyučovania matematiky na základnej škole. Jednou z najdôležitejších didaktických zásad vo vyučovaní matematiky je zásada názornosti, ktorá je pri zlomkoch veľmi potrebná. Je dôležité správne a postupne budovať predstavy o zlomku, pričom základ je v porozumení zlomku ako časti celku. Zameriavame sa na modelovanie zlomkov a využívanie rôznych učebných pomôcok s cieľom názorne a prakticky prezentovať učivo o zlomkoch žiakom.

Predložená publikácia obsahuje teoretický úvod ku zlomkom, jeho rôznym interpretáciám a problematickým častiam. V ďalšej časti sa zameriavame na tvorbu učebných pomôcok, ktoré boli reálne so žiakmi vytvorené a použité pri riešení rôznych úloh, ktoré sú v publikácii uvedené. Súčasťou sú aj pracovné listy, ktoré sú určené žiakom základnej školy pri preberaní konkrétnych tematických celkov týkajúcich sa zlomkov a racionálnych čísel.

Našim cieľom pri tvorbe tejto publikácie bolo tematicky spracovať učivo o zlomkoch s dôrazom na názornosť a modelovanie pri ich vyučovaní. Veríme, že uvedené námety budú nielen inšpiratívne, ale pomôžu žiakom porozumieť tomuto náročnému učivu.

Pracovné listy sú dostupné aj elektronicky v samostatných súboroch tu:
https://drive.google.com/drive/folders/1AOf8SsnODs2C7eKzg-VO2QCA8qnZTyFW?usp=sharing

Autorky

1 ZLOMKY A RACIONÁLNE ČÍSLA

Pojem zlomok má v matematike dva významy. Prvým významom je spôsob zápisu dvoch číslic v tvare zlomku, teda oddelených zlomkovou čiarou. Ide o symbol. Druhý význam je definovanie zlomkov ako nezáporných racionálnych čísel. Poradie čísel v zápise zlomku je dôležité, ide o usporiadanú dvojicu čísel. Číslo nad zlomkovou čiarou sa nazýva čitateľ a číslo pod zlomkovou čiarou sa nazýva menovateľ zlomku.

Racionálnym číslom označujeme množinu všetkých navzájom ekvivalentných zlomkov tvaru $\frac{a}{b}$, kde a, b sú celé čísla $b \neq 0$. To, že dva zlomky $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ sú ekvivalentné, definujeme nasledovne: $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$ Takto definovaná relácia ekvivalencie zlomkov rozkladá množinu všetkých usporiadaných dvojíc celých čísel na triedy ekvivalentných zlomkov. Každú triedu tvoria všetky zlomky, ktoré sú navzájom ekvivalentné a obrazom každého z nich je ten istý bod na číselnej osi. Takúto triedu všetkých ekvivalentných zlomkov nazývame racionálne číslo. Miesto znamienka „~“ pre ekvivalenciu zlomkov píšeme znak „=“ a rovnosť zlomkov chápeme v zmysle uvedenej definície (Šedivý, 1990).

Často sa stáva, že ľudia považujú pojem zlomok a racionálne číslo za synonymá. Ide však o dve rozdielne množiny čísel. Uvádzame nasledovné príklady:

- všetky racionálne čísla môžeme zapísať v tvare zlomku, napr.: $\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{4}}{3} = \frac{2}{3}; \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{1}; \ldots$
- nie všetky čísla zapísané v tvare zlomku sú racionálne, napr.: $\frac{\pi}{2}$
- ekvivalentným zlomkom odpovedá iba jedno racionálne číslo, napr.: $\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{10}{25} = \cdots = 0{,}4$
- racionálne čísla môžu byť zapísané ako zlomky, ale aj v tvare desatinných čísel s konečným desatinným rozvojom, desatinných čísel s nekonečným periodickým desatinným rozvojom, ako percentová časť, podiel a úmera (Lamon, 2012).

Zlomky znamenajú pre žiakov kvalitatívny skok vo vyučovaní matematiky. Pri práci so zlomkami nemožno využívať význam, modely a symboly pre sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie, ktoré sme zaviedli pri celých číslach. V množine prirodzených čísel jednotka „jedna“ vždy reprezentuje jeden objekt. Pri zlomkoch však môže jednotka, jeden celok, pozostávať z viacerých objektov (3 pizze, 4 čokolády) alebo môže ísť o zloženú jednotku, ktorá pozostáva z viacerých objektov, ktoré tvoria celok (balíček 3 zamrznutých pízz, škatuľka čokolády obsahujúca 4 čokoládové tyčinky a pod.) (Lamon, 2012).

Nasledovná tabuľka (Tabuľka 1) obsahuje porovnanie prirodzených čísel a zlomkov.

Tabuľka 1: Porovnanie prirodzených čísel a zlomkov (Švecová et al., 2017)

Prirodzené čísla	Zlomky
Sú jasne definované ako kardinálne čísla neprázdnych konečných množín, teda odpovedajú na otázku: „Koľko?“.	Vyjadrenie zlomku nie je jednoznačné, keďže zlomok môže predstavovať časť celku, pomer, podiel, mieru a operátor.
Zápis je jednoznačný, každé číslo má svoj znak; každému počtu prvkov je priradené práve jedno číslo.	Zápis obsahuje dve čísla a čiaru medzi nimi (čitateľ, menovateľ, zlomková čiara); ten istý základný zlomok môže byť zapísaný veľkým množstvom rôznych zápisov (ekvivalentné zlomky).
Rovnosť je jednoznačná, kardinálne číslo všetkých množín s tým istým počtom prvkov je rovnaké a zapísané tým istým znakom.	Rovnosť nie je tak jasná, existuje nekonečne veľa ekvivalentných zlomkov vyjadrujúcich rovnakú časť celku, no vyjadrených rôznymi zápismi.
Usporiadanie je jasne definované; každé prirodzené číslo má svojho nasledovníka a bezprostredného nasledovníka; medzi dvomi po sebe idúcimi prirodzenými číslami neexistuje žiadne prirodzené číslo.	Usporiadanie nemá žiadne základy v prirodzenom usporiadaní čísel; neexistuje jednoznačný predchodca ani nasledovník racionálneho čísla; medzi dvomi racionálnymi číslami existuje nekonečne veľa racionálnych čísel.
Sčítanie a odčítanie vychádza z prirodzeného usporiadania čísel, môžeme priamo sčítať ľubovoľné prirodzené čísla.	Sčítanie a odčítanie nemá podporu v prirodzenom usporiadaní čísel; priamo môžeme sčítať len zlomky, v ktorých menovateľ vyjadruje rovnaký počet jednotkových častí, na ktoré bol celok rozdelený.
Pri multiplikatívnych počtových operáciách sa dané číslo jednoznačne zväčšuje (násobením) alebo zmenšuje (delením).	Pri násobení a delení sa môže dané číslo zväčšovať alebo zmenšovať v závislosti od čitateľa a menovateľa zlomku (podľa toho, či je zlomok väčší alebo menší ako 1).

1.1 Niektoré príčiny neporozumenia zlomkom

V polovici sedemdesiatych rokov Kieren(1980) navrhol štyri rôzne možnosti interpretácie vnímania zlomkov medzi ktorými existuje určitý vzťah. Zlomok môžeme vnímať ako mieru, podiel, pomer a operátor. V každej z týchto možností sa objavuje význam zlomku aj ako časti celku. Preto časť celku môžeme považovať za piatu interpretáciu vnímania zlomku. (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006) Tieto interpretácie zlomku sú matematicky a psychologicky nezávislé aj napriek tomu, že zobrazujú päť oddelených vzorcov myslenia týkajúcich sa zlomkov alebo racionálnych čísel (Kieren, 1980).

Kieren tvrdí, že úplné porozumenie racionálnym číslam nezáleží iba od porozumenia jednotlivým oddeleným interpretáciám zlomkov, ale žiaci musia porozumieť aj tomu, ako sú tieto interpretácie vzájomne prepojené. (Behr, Lesh, et al, 1983)

Porozumenie zlomku ako časti celku sa považuje za základ pre porozumenie ostatným subkonštruktom zlomkov. Z uvedených tvrdení vyplýva, že na to, aby žiaci mohli porozumieť zlomku ako miere, najskôr si musia osvojiť usporiadanie a rovnosť zlomkov, a na to, aby žiaci porozumeli operácii sčítania zlomkov, najskôr si musia osvojiť ponímanie zlomku ako miery.

Smith (2002) predpokladá, že na to, aby žiaci objavili a porozumeli zlomku ako miere, musia najskôr zvládnuť relácie usporiadania a rovnosti zlomkov. Dokazuje to aj Kieren (1976), ktorý tvrdí, že pre porozumenie zlomku ako miere musia mať žiaci zvládnuté tri kognitívne štruktúry:

- Predstava o jednej jednotke a jej ľubovoľnom rozdelení na menšie časti.
- Žiak musí mať vytvorenú predstavu časti celku vzhľadom na číselnú os a musí spoznať vlastnosti ekvivalentných zlomkov vyplývajúce z postupného rozdeľovania úsečky na menšie a menšie časti (napr. 1/2=3/6 a pod.).
- Žiak musí objaviť a porozumieť vzťahu medzi usporiadaním zlomkov.

Podľa Behr et al. (1984) je porozumenie zlomku ako miere nevyhnutné pre nadobudnutie zručnosti pri sčítavaní zlomkov. Toto tvrdenie podporuje aj Kieren (1980), aj keď dodáva, že porozumenie zlomku ako miere je pre žiakov najnáročnejšie a iba zriedkavo sa vyskytuje v učebniciach matematiky.

Ukazuje sa teda, že čím viac sú žiaci od začiatku oboznamovania sa so zlomkami vedení k práci a modelovaniu na číselnej osi, tým majú menšie problémy neskôr pri počtových operáciách so zlomkami, usporiadaní, porovnávaní a ekvivalencii zlomkov. Číselná os by mala byť viac zahrnutá do vyučovania zlomkov a racionálnych čísel, čím by sa prispelo ku skvalitneniu vyučovania daných konštruktov.

Problémy s porozumením zlomkom súvisia aj so špecifickým zápisom zlomku, ktorý je rovnaký pre rôzne interpretácie zlomku, ako je to uvedené v príklade v Tabuľke 2.

Tabuľka 2: Rôzny význam čísel v zápise zlomku

Zlomok $\frac{3}{4}$	celok	počet častí, na ktoré je celok rozdelený	počet častí vyjadrených v zlomku	veľkosť jednej časti
časť celku	1	4	3	$\frac{1}{4}$
podiel	3	4	-	$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$
pomer	1	3+4=7	3 a 4	$\frac{1}{7}$

Pri zavádzaní zlomkov a práci so zlomkami je dôležité modelovanie. Spravidla využívame tri základné druhy modelov: spojitý, diskrétny a číselnú os. Každý model je niečím špecifický, preto je dôležité vedieť vybrať v danej situácii vhodný model. Zároveň je tiež dôležité vo vyučovacom procese využívať čo najrozmanitejšie modely na zvýšenie porozumenia zlomkom. Základom je zlomok ako časť celku, ktorý modelujeme na princípoch uvedených v Tabuľke 3.

Tabuľka 3: Rôzne modely zlomku (podľa English , Halford, 1995)

	Určenie celku	Určenie rovnakých častí	Určenie zlomku
Spojitý model	obsah daného útvaru	rovnaký obsah	obsah časti útvaru
Diskrétny model	množina objektov	rovnaký počet objektov	počet objektov podmnožiny danej množiny objektov
Číselná os	jednotka vzdialenosti alebo dĺžky	rovnaká dĺžka	umiestnenie bodu vo vzťahu k vzdialenosti od nuly s dôrazom na definovanú jednotku

1.2 Rôzne interpretácie pojmu zlomok

1.2.1 Zlomok ako časť celku

Otázky vzťahu celku a časti majú v školskej matematike zvláštne postavenie. Sú previazané na ďalšie matematické štruktúry, ktorých pochopenie ovplyvňuje pojmotvorný proces. Patria k najviac študovaným oblastiam didaktiky matematiky, ale napriek značnému množstvu získaných poznatkov zostávajú jedným z hlavných problémov vo vyučovaní matematiky.

V interpretácii vnímania zlomku ako časti celku je zlomok definovaný ako stav, keď je súvislá množina alebo množina diskrétnych objektov rozdelená na rovnaké časti (Lamon, 1999; Marshall, 1993; in Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006). To znamená, že zlomok reprezentuje porovnanie počtu častí rozdeleného celku k celkovému počtu častí, na ktoré bol tento celok rozdelený. Vzhľadom k tomu, musí byť čitateľ menší, nanajvýš rovný ako menovateľ (Charalambous , Pitta-Pantazi, 2006).

S procesom delenia celku na časti sa dieťa stretáva už v predškolskom veku, kedy sa začína rozvíjať chápanie vzťahu časti a celku. Chápanie vzťahu časti a celku je dôležité pre používanie matematiky v praxi, ale aj v pojmotvornom procese. S vytváraním celkov a ich delením sú späté základné pojmy elementárnej matematiky (pojem prirodzeného a racionálneho čísla a pojem geometrického útvaru) (Tichá, Macháčková, 2006).

Proces určenia zlomku ako časti celku má podľa Divíška (1989) dve fázy:

1. Celok rozdelíme na toľko rovnakých častí, koľko udáva menovateľ zlomku.
2. Vytvoríme množinu, ktorá obsahuje toľko vzniknutých častí, koľko udáva čitateľ zlomku.

Zložitejšie je riešenie obrátenej úlohy, kedy z danej časti máme stanoviť pôvodný celok. Táto úloha sa tiež rieši v dvoch fázach:

1. Danú časť rozdelíme na toľko rovnakých dielov, koľko udáva čitateľ zlomku.
2. Vytvoríme množinu, ktorá obsahuje toľko vytvorených dielov, koľko udáva menovateľ zlomku.

V prvom i druhom prípade si však tieto fázy neuvedomujeme, sú iba podvedomé, pretože ide o tzv. typové úlohy a memorovanie výpočtových postupov typových úloh je neprípustné (Divíšek,1989).

Pri riešení úloh je nevyhnutné, aby žiaci pochopili, že časti na ktoré celok rozdelia, musia byť rovnako veľké. Veľkosť danej časti závisí od toho, koľko rovnakých častí vytvoríme. So vzrastajúcim počtom častí sa zmenšuje veľkosť každej časti. Napr. $\frac{1}{3}$ z koláča (menej častí) reprezentuje väčšiu časť koláča ako $\frac{1}{6}$ (viac častí) toho istého koláča (Lamon, 2012).

Ak žiaci úplne porozumeli interpretácii zlomku ako časti celku, mali by byť schopní rozdeliť súvislú množinu, ale aj množinu diskrétnych objektov na rovnaké časti a rozlíšiť, či je celok rozdelený na rovnaké časti. Platí to aj v opačnom prípade, kedy si žiaci musia vedieť predstaviť celok, keď je daný zlomok, teda časť celku.

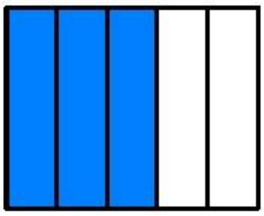
Ďalej by mali byť schopní prerozdeliť už rozdelený celok (napr. identifikovanie ¾ celku, keď je rozdelený na osminy a pod.).

Tiež by mali ovládať nasledovné nevyhnutné podmienky týkajúce sa vzťahu medzi jednotlivými časťami a celkom:

a) rozdelené časti musia spoločne tvoriť celok,
b) časti, na ktoré bol celok rozdelený sú menšie ako tento celok,
c) vzťah medzi časťami a celkom je zachovaný bez ohľadu na veľkosť, tvar, usporiadanie alebo orientáciu rovnakých častí (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

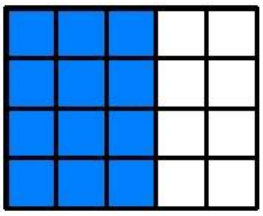
S vnímaním zlomku ako časti celku súvisí delenie celku na časti rôznej veľkosti postupným rozdeľovaním. Jednotkovú časť budeme nazývať jedna jednotka.

Na nasledujúcom obdĺžniku (Obr. 1.1) sú zafarbené $\frac{3}{5}$ celku, pretože obdĺžnik je rozdelený na päť zhodných menších obdĺžnikov a porovnávame tri zafarbené časti ku všetkým piatim častiam. Jedna jednotka je teda jeden malý obdĺžnik.



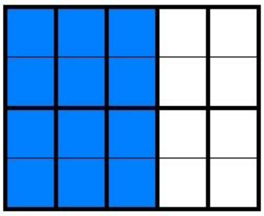
Obrázok 1.1 Znázornenie jednej jednotky

Ďalej máme rovnaký obdĺžnik (Obr. 1.2), ktorý je rozdelený na 20 zhodných štvorcov. Vyznačená časť potom tvorí $\frac{12}{20}$ celku. Jedna jednotka je v tomto prípade jeden malý štvorec.



Obrázok 1.2 Znázornenie jednej jednotky

Ak obdĺžnik opäť rozdelíme na desať menších obdĺžnikov (Obr. 1.3), ktoré vznikli z dvoch jednotkových štvorcov, zafarbená časť bude tvoriť $\frac{6}{10}$ celku. Jedna jednotka je jeden menší obdĺžnik.



Obrázok 1.3 Znázornenie jednej jednotky

Na obrázkoch môžeme vidieť, že hoci časť celku je vždy pomenovaná a zapísaná iným zlomkom, ide vždy o tú istú časť celku, teda $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20}$. Takéto zlomky nazývame **ekvivalentné,** pretože reprezentujú rovnaké množstvo, teda rovnakú časť celku. Na základe toho možno tvrdiť, že delenie celku na rôzne jednotkové časti je propedeutikou pre porozumenie rovnosti zlomkov, pretože vyjadruje rovnakú kvantitu zapísanú rôznymi číselnými zápismi zlomku (Lamon, 2012).

Pri počtových operáciách so zlomkami musíme vždy identifikovať jednotkovú časť a uistiť sa, že každý z daných zlomkov je interpretovaný pomocou tejto jednotkovej časti. Nemôžeme porovnávať zlomky založené na rozdielnych jednotkových častiach. Určenie jednotkovej časti spôsobuje žiakom problémy. Vo vyučovaní by mal učiteľ používať rôzne typy diskrétnych aj spojitých jednotiek zložených z viacerých objektov, aby sa žiaci s nimi naučili pracovať (Lamon, 2012).

Vnímanie zlomku ako časti celku je základom pre všetky ostatné interpretácie zlomku a považuje sa za dôležité pri vytváraní správnej terminológie (Behr, Lesh, et al, 1983).

1.2.2 Zlomok ako miera

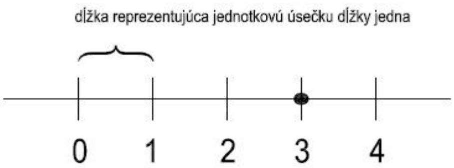
V interpretácii vnímania zlomku ako miery je zlomok spojený s dvomi úzko prepojenými a vzájomne závislými pojmami. Prvým pojmom je číslo, ktoré vyjadruje kvantitatívnu stránku zlomku, a teda vyjadruje aký veľký je daný zlomok. Druhým pojmom je miera, ktorá zobrazuje nejaký interval (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

Keď hovoríme o zlomku ako miere, dôraz kladieme na úspešné rozdeľovanie nejakej jednotkovej úsečky. Rozdeľovanie hrá dôležitú úlohu aj pri iných interpretáciách zlomku, ale v tomto prípade sa odlišuje tým, že tu existuje aj dynamický aspekt. Miesto porovnávania rovnakých častí, musíme pevne stanoviť počet rovnakých častí na jednotkovej úsečke. Tento počet rovnakých častí sa môže meniť, od čoho závisí aj menovateľ zlomku (Lamon, 2012).

Konkrétnejšie, jednotková časť je definovaná napr. zlomkom $\frac{1}{a}$ a opakovane ju môžeme použiť na určenie vzdialenosti od počiatočného bodu. Napr. $\frac{3}{4}$ korešpondujú s tromi $\frac{1}{4}$ jednotkami od počiatočného bodu. Preto sa toto vnímanie zlomku systematicky spája s číselnou osou alebo meracím nástrojom (napr. pravítko) na zistenie vzdialenosti od jedného bodu k druhému na základe jednotkovej časti s veľkosťou $\frac{1}{a}$ (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

Petit et al. (2016) uvádzajú nasledovné charakteristiky číselnej osi, ktorými sa číselná os líši od iných modelov zlomku:

1. Jednotka je reprezentovaná dĺžkou na rozdiel od plochy alebo množiny diskrétnych objektov. Napríklad na Obrázku 1.4 môžeme vidieť ako určujeme dĺžku pomocou bodu na číselnej osi.

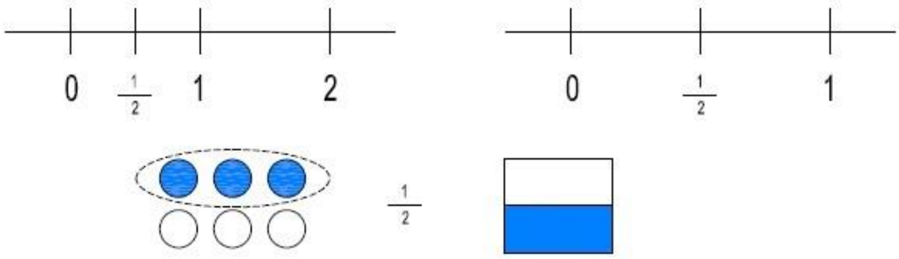


Obrázok 1.4 Znázornenie jednotkovej úsečky dĺžky 1

   Na číselnej osi je definovaná jednotková úsečka dĺžky 1. Bod, ktorý je vyznačený na číselnej osi znázorňuje vzdialenosť od nuly. Ak je daný bod vyznačený na čísle 3, znamená to, že je vo vzdialenosti 3 jednotky od nuly.

2. Pri využívaní číselnej osi ako modelu zlomku je na jej zavedenie potrebné definovať jednotkovú úsečku ako celok, ktorý delíme na menšie jednotkové časti. Na rozdiel od iných spojitých alebo diskrétnych objektov, kde je tento celok znázornený v modeli.

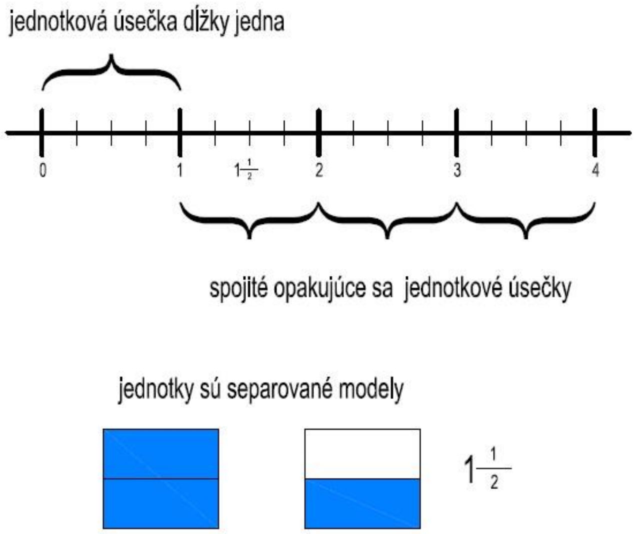
Ako príklad uvádzame Obrázok 1.5.



Obrázok 1.5 Definovanie celku na číselnej osi a na množine diskrétnych alebo spojitých objekotv

Presné umiestnenie ďalšieho čísla (napr. $\frac{1}{2}$) závisí od označenia, ktoré definuje jednotkovú úsečku.

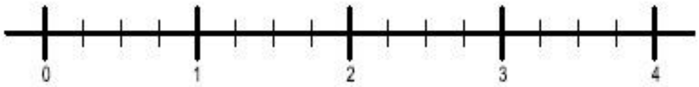
3. Opakujúce sa jednotkové úsečky nie sú vizuálne oddelené. To znamená, že model číselnej osi je spojitý, na rozdiel od množiny spojitých alebo diskrétnych objektov, v ktorých sú jednotky fyzicky rozdelené. Na ukážku uvádzame nasledovný obrázok (Obr. 1.6). Ide napr. o znázornenie zlomku v tvare zmiešaného čísla $1\frac{1}{2}$.



Obrázok 1.6 Spojitosť jednotkových úsečiek

4. Jednotkové úsečky na číselnej osi možno rozdeľovať neobmedzene. Ide o to, že niekto môže jednotkové úsečky rozdeliť na osminy, niekto na šestnástiny, niekto na tri a dvadsatiny a pod. Jediným obmedzením je presnosť nástrojov používaných na rozdelenie danej číselnej osi. Na Obrázku 1.7 je číselná os, ktorá pozostáva zo štyroch

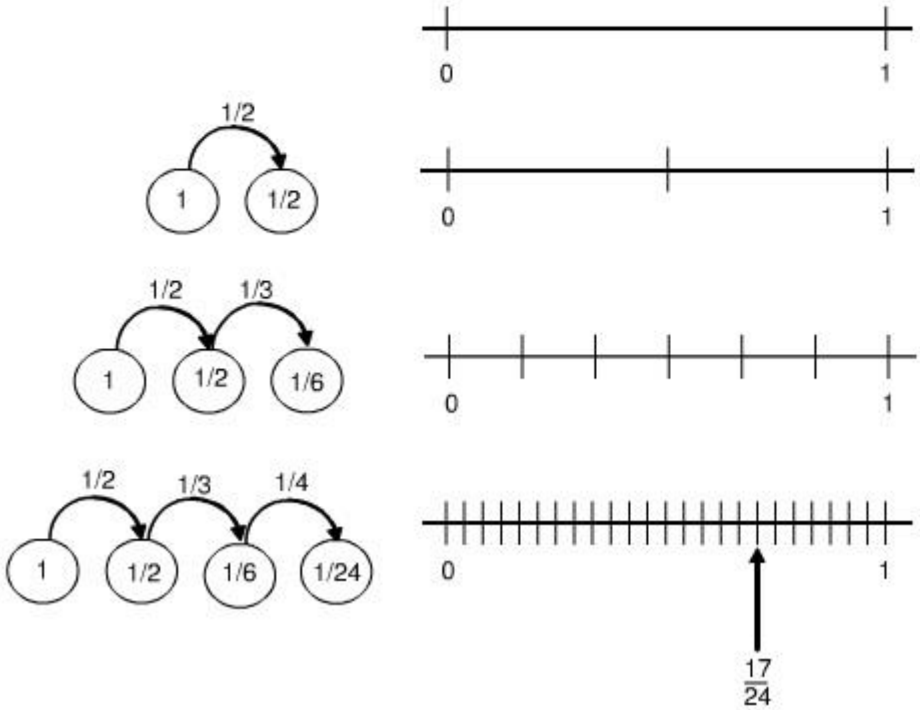
jednotkových úsečiek, z ktorých je každá rozdelená na štvrtiny a ilustrujúca aj znázornenie štvrtiny väčšej ako 1.



Obrázok 1.7 Neobmedzené rozdeľovanie jednotkových úsečiek

Ak žiaci vykonajú viac po sebe idúcich rozdeľovaní jednotkovej úsečky, môžu zostať zmätení a stratia prehľad o tom, koľko jednotkových častí im vzniklo. Preto môže byť pre žiakov nápomocné, keď si pomocou šípok zaznamenajú počet rovnakých častí, na ktoré bola každá existujúca jednotková časť rozdelená a do ďalšej kolónky si zaznamenajú novú výslednú jednotkovú časť.

Napríklad: Zaznačte na číselnej osi zlomok $\frac{17}{24}$ (Lamon, 2012).



Obrázok 1.8 Postupné rozdeľovanie jednotkovej úsečky

Ak žiaci porozumeli zlomku ako miere, mali by byť schopní umiestniť číslo na číselnú os, ale aj naopak, mali by tiež vedieť identifikovať číslo zaznačené na číselnej osi.

Tiež by si mali uvedomovať, že pri chápaní zlomku ako miery možno na číselnej osi znázorniť nekonečný počet čísel, čo pomáha žiakom budovať lepšie predstavy o hustom usporiadaní množiny racionálnych čísel, o usporiadaní a veľkosti racionálnych čísel.

Vlastnosť hustého usporiadania množiny racionálnych čísel hovorí o tom, že medzi dvomi zlomkami existuje nekonečný počet zlomkov, a že je možné nájsť zlomok, ktorý je ľubovoľne blízko k danému bodu.

Napríklad: *Nájdite tri zlomky medzi* $\frac{1}{4}$ *a* $\frac{1}{3}$.

Vieme, že musíme jednotkovú úsečku rozdeliť na dvanástiny. Teda ak $\frac{1}{4}$ rozšírime číslom 3, dostaneme zlomok $\frac{3}{12}$ a zo zlomku $\frac{1}{3}$ po rozšírení číslom 4 dostaneme zlomok $\frac{4}{12}$. Ak rozdelíme interval medzi $\frac{3}{12}$ a $\frac{4}{12}$ na dve rovnaké časti, potom novovzniknutý interval bude rozdelený na štyri a dvadsatiny, následne $\frac{3}{12}$ a $\frac{4}{12}$ budú premenované na $\frac{6}{24}$ a $\frac{8}{24}$.

Ak rozdelíme interval medzi $\frac{3}{12}$ a $\frac{4}{12}$ na tri rovnaké časti, potom novovzniknutý interval bude rozdelený na šesť a tridsatiny, následne $\frac{3}{12}$ a $\frac{4}{12}$ budú premenované na $\frac{9}{36}$ a $\frac{12}{36}$. Teraz už môžeme ľahko vidieť, že medzi zlomkami $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{3}$ sa nachádzajú napríklad zlomky $\frac{7}{24}$, $\frac{10}{36}$ a $\frac{11}{36}$. Ak by sme v rozširovaní zlomkov pokračovali, našli by sme aj ďalšie zlomky, ktoré sa nachádzajú medzi zlomkami $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{3}$ (Lamon, 2012).

Vlastnosť hustého usporiadania množiny racionálnych čísel možno demonštrovať aj prostredníctvom aritmetického priemeru dvoch rôznych čísel, ktorý sa rovná číselnej hodnote nachádzajúcej sa v rovnakej vzdialenosti od oboch daných čísel (t. j. uprostred) (Petit et al., 2016).

Prostredníctvom postupného rozdeľovania žiaci rýchlejšie pochopia rovnosť zlomkov a úpravu na spoločného menovateľa. Pomocou značenia šípok ako v predchádzajúcom príklade sa žiaci stretnú aj s operáciami násobenia a delenia zlomkov. Preto je podľa Lamon (2012) zobrazenie zlomkov na číselnej osi vhodným modelom na znázornenie vyššie spomínaných operácií ešte pred zavedením algoritmov.

Číselná os sa považuje za vhodný nástroj na porozumenie zlomku ako miere. Napriek tomu mnohé výskumy ukazujú, že úlohy zamerané na zaznačenie zlomku na číselnej osi sú pre žiakov problematické.

V prepojení vnímania zlomku ako miery a procesu rozdelenia celku na časti Lamon (2012) považovala rozdelenie celku na časti, iné ako polovice, za nutnú zručnosť k pochopeniu zlomku ako miery.

Možno teda konštatovať, že žiaci úplne porozumejú zlomku ako miere, ak sú úspešní v postupnom rozdeľovaní jednotkovej úsečky na menšie a menšie časti, sú schopní nájsť zlomok medzi dvomi danými zlomkami a sú schopní porovnať ľubovoľné dva zlomky (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

1.2.3 Zlomok ako pomer

Pri interpretácii zlomku ako pomeru ide o vyjadrenie porovnania dvoch veličín, a preto je táto interpretácia považovaná skôr za porovnávací index, ako za číslo (Carraher, 1996, in Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

Mnoho úloh môže byť pretransformovaných na vnímanie zlomku ako pomeru. Väčšinou ide o prípady, kedy sa pomer používa ako alternatívny spôsob vyjadrenia multiplikatívnych vzťahov.

Napríklad tvrdenie, že počet mužov na koncerte tvoril $\frac{2}{3}$ z počtu žien. Nech m reprezentuje počet mužov a nech w reprezentuje počet žien. Potom môžeme napísať, že $m = \frac{2}{3}w$ alebo $\frac{m}{w} = \frac{2}{3}$. Na rozdiel od porovnávania zlomkov ako časti celku píšeme $m : w = 2 : 3$ (teda pomer počtu mužov k počtu žien je 2:3).

Pre niektorých žiakov je prirodzenejšie porovnanie zlomkov pomocou predstavy pomeru, ako pri predstave zlomkov ako časti celku (Lamon, 2012).

Na nasledujúcom obrázku (Obr.1.9) je znázornený zlomok, ktorý pri interpretácii zlomku ako časti celku označuje $\frac{2}{3}$ a pri interpretácii zlomku ako pomeru ide o 2:1.

Obrázok 1.9 Znázornenie zlomku

Mnohé výskumy dokázali, že ak žiaci preferujú interpretáciu zlomku ako pomeru a vo vyučovaní sa buduje na ich intuitívnych vedomostiach o porovnávaní, dochádza k hlbšiemu porozumeniu racionálnym číslam. Proporčné uvažovanie vzniká skôr než učebné osnovy kladú dôraz na porovnávanie zlomkov ako časti celku (Lamon, 2012).

Pojem pomer býva často zamieňaný s pojmom úmera. Lamon (2012) definuje pojem úmera ako porovnanie dvoch veličín rôzneho typu, zatiaľ čo pojem pomer znamená porovnanie dvoch veličín rovnakého typu. Lamon (2012) túto rozdielnosť ilustruje na nasledovnom príklade: „Sedem dievčat si má rozdeliť 3 pizze a traja chlapci si majú rozdeliť jednu pizzu. Kto dostane viac pizze? Chlapec alebo dievča?“ Ak žiaci porovnávali počet detí k počtu pízz, použili predstavu úmery. Ak žiaci porovnávali počet chlapcov ku počtu dievčat a počtu pízz, ktoré si majú rozdeliť chlapci a počtu pízz, ktorý si majú rozdeliť dievčatá, použili predstavu pomeru.

Interpretácia zlomku ako pomeru sa líši od ostatných interpretácií zlomku v nasledovných bodoch (Lamon, 2012):

- Na rozdiel od interpretácie zlomku ako časti celku, operátora, miery a podielu, ktoré sú vždy racionálne čísla, pri interpretácii zlomku ako pomeru nemusí ísť o racionálne číslo. Napr. pri obvode kružnice sa pomer obvodu kružnice a priemeru kružnice rovná číslu π (pí). Pí nie je racionálne číslo, pretože ho nemožno zapísať ako podiel dvoch celých čísel.
- V pomere môže byť 0 ako druhý člen, pričom pri zlomkoch musí byť menovateľ rôzny od 0. Napr. ak interpretujeme pomer mužov a žien na porade, kam sa dostavilo 10 mužov a žiadna žena, môžeme napísať, že pomer je 10:0.
- Zlomkom sa rozumie usporiadaná dvojica, čo znamená, že ak zameníme poradie a a b v zlomku $\frac{a}{b}$, dostaneme iný zlomok. Rovnako je to aj pri interpretácii zlomku ako pomeru, ale ak si vezmeme pomer 4 chlapci : 3 dievčatám a 3 dievčatá : 4 chlapcom, dostaneme rovnakú informáciu o danej situácii.
- Princíp počítania s pomermi sa môže líšiť od princípu počítania so zlomkami. Napr. Mária pri bejzbale odpália 3 loptičky z piatich. Dnes odpálila 2 loptičky zo šiestich. Koľko odpalov dosiahla za dva dni? Mária odpálila za prvý deň 3 loptičky z piatich $(3{:}\,5)$, na druhý deň odpálila 2 loptičky zo šiestich $(2{:}\,6)$, teda za dva dni mala 5 odpalov z 11, čo vieme pomerom zapísať ako $5{:}\,11$. Ak by sme sčítali dané zlomky, neplatí, že $\frac{3}{5}+\frac{2}{6}=\frac{5}{11}$!

Aby žiaci úplne porozumeli zlomku ako pomeru, potrebujú si skonštruovať myšlienku relatívneho množstva (Lamon, 1999; Mashall, 1993, in Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006). Žiaci si tiež potrebujú uvedomiť, čo znamená, keď povieme, že existuje vzťah medzi dvomi veličinami. Tiež potrebujú rozumieť vlastnostiam, ako sú kovariancia a invariancia, čo znamená, že v pomere sa dve veličiny menia spoločne a vzťah medzi nimi zostáva nemenný. Ďalej by si mali uvedomovať, že ak dve veličiny v pomere vydelíme rovnakým nenulovým číslom, hodnota pomeru zostáva nezmenená (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

Keďže vlastnosti kovariancia[1] a invariancia[2] platia iba pre pomery, považujeme ich za rozhodujúce faktory pri rozhodovaní, či ide o vnímanie zlomku ako časti celku, alebo ako pomeru. Tiež sú považované za nevyhnutné pri objavovaní myšlienky rovnosti zlomkov (Marshall, 1993). Napriek tomu žiaci, ktorí sú schopní skonštruovať ekvivalentné zlomky, nemusia byť schopní rozpoznať vlastnosť invariancie (Lamon, 2012).

1.2.4 Zlomok ako operátor

Môžeme povedať, že zlomok ako operátor sa správa ako zobrazenie, ktoré nejakú množinu zobrazí na inú množinu. Jednoduchšie povedané, pri interpretácii zlomku ako operátora je možné:

- predlžovať alebo skracovať úsečky,
- zvýšiť alebo znížiť počet prvkov v množine diskrétnych objektov,
- zväčšovať alebo zmenšovať geometrické útvary v rovine (napr. trojuholník, štvorec...).

Operátor je súbor inštrukcií na uskutočnenie nejakého procesu. Napríklad „ $\frac{2}{3}$ z niečoho“ je operátor, ktorý inštruuje, že musíme násobiť číslom 2 a výsledok vydeliť číslom 3. Na aplikovanie procesu „ $\frac{2}{3}$ z niečoho “ sme použili už známe operácie násobenia a delenia. Tieto operácie môžu byť vnímané ako individuálne operácie, alebo tak, že jedna z operácií je vykonávaná na výsledku druhej a môžu byť považované za jednu operáciu. Napríklad s operátorom $\frac{2}{3}$ môžeme pracovať ako s jednou operáciou na nejakom množstve M, ďalej ako s násobením aplikovaným na výsledok delenia množstva M, alebo ako s delením aplikovaným na násobenie množstva M:

$$\frac{2}{3}(M) = 2\left(\frac{M}{3}\right) = \frac{2M}{3}$$

Nezáleží na tom, ktorý z uvedených spôsobov použijeme pri výpočte, výsledok dostaneme vždy rovnaký. To nám umožňuje vybrať si vždy najvhodnejší spôsob v závislosti od konkrétneho zadania.

---

[1] závislosť medzi dvomi náhodnými veličinami

[2] výraz s nemennou hodnotou, konštantná veličina

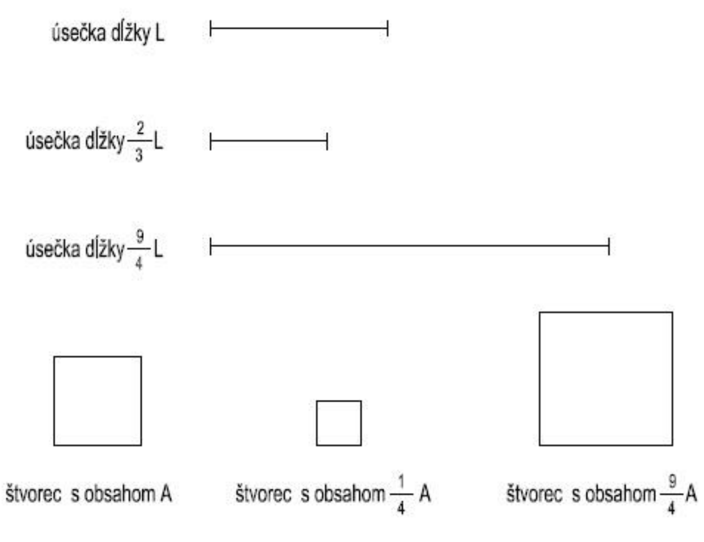
Ak aplikujeme operátor na množinu diskrétnych objektov, ľahko dostaneme výsledok. Nasledujúci príklad znázorňuje použitie operátora v dvoch krokoch. Nezáleží na tom, ktorá operácia (násobenie alebo delenie) bola použitá ako prvá alebo druhá, chceme zistiť, aký bol operátor.

Nasledujúci obrázok (Obr. 1.10) znázorňuje použitie operátora v dvoch krokoch.

Obrázok 1.10 Ukážka úlohy na nájdenie operátora. Zdroj: (Lamon, 2012)

Začíname s množinou 4 objektov s použitím dvoch operácií. Výsledkom prvej operácie je, že zo 4 objektov zostali 2, teda sme museli deliť číslom 2. Po aplikácii druhej operácie sa množina 2 objektov zväčšila na 18, teda sme museli násobiť číslom 9. V tomto prípade ide o zloženie dvoch operácií – násobenia a delenia nasledovným spôsobom: množinu 4 objektov delíme číslom 2 a násobíme číslom 9, teda operátor vieme vyjadriť jediným zlomkom, ktorý je rovný číslu $\frac{9}{2}$. Symbolicky to môžeme zapísať ako $4.\left(\frac{9}{2}\right) = 18.$

Nasledujúci obrázok (Obr. 1.11) znázorňuje vplyv operátora na obsah útvaru a na dĺžku úsečky.



Obrázok 1.11 Vplyv operátora na obsah útvaru a dĺžku úsečky

Na obrázkoch môžeme vidieť, že v prípade, ak ide o zlomok (operátor) menší ako 1 ide o zmenšenie rovinného geometrického útvaru alebo dĺžky úsečky a v prípade, ak je zlomok (operátor) väčší ako 1, ide o zväčšenie rovinného geometrického útvaru alebo dĺžky úsečky. Ako príklad rovinného geometrického útvaru uvádzame štvorec s obsahom $A\ j^2$(viď. Obr. 1.11). Zlomok (operátor) $\frac{1}{4}$ z obsahu A znamená, že daný obsah sa štyrikrát zmenší, pričom tvar zostane zachovaný. Prakticky ide o to, že štvorec s obsahom A rozdelíme na štyri zhodné štvorce a novovzniknutý štvorec bude mať obsah $\frac{1}{4}A\ j^2$. Ak máme zlomok (operátor) $\frac{9}{4}$ pôjde o zväčšenie, pretože ide o zlomok väčší ako jedna. Zlomok (operátor) $\frac{9}{4} = 9 \cdot \frac{1}{4}$, teda novovzniknutý štvorec bude zložený z deviatich zhodných štvorcov s obsahom $\frac{1}{4}A\ j^2$. Rovnaké pravidlá platia aj pri dĺžke úsečky. Ak máme danú úsečku dĺžky L, operátor $\frac{2}{3}$ z úsečky dĺžky L znamená, že pôvodnú úsečku rozdelíme na tretiny, z ktorých vezmeme dve a novovzniknutá úsečka bude mať dĺžku $\frac{2}{3}L$. Teda pôjde o zmenšenie úsečky. Ak ide o zlomok (operátor) $\frac{9}{4}$ z dĺžky úsečky L, znamená to, že danú úsečku musíme rozdeliť na štvrtiny a dĺžku $\frac{1}{4}$ nanesieme deväťkrát. Teda pôjde o zväčšenie.

Pri úplnom pochopení zlomku ako operátora, by žiaci mali byť schopní násobiť zlomkom rôznymi spôsobmi v závislosti od konkrétneho zadania. Tiež sú schopní identifikovať operátor a určiť vplyv operátora na množinu diskrétnych objektov, ale aj na dĺžku úsečky a na zväčšovanie a zmenšovanie rovinného geometrického útvaru a jediným zlomkom pomenovať zložené operácie, ktoré vznikli použitím dvoch multiplikatívnych operácií (násobenia a delenia) (Lamon, 2012).

1.2.5 Zlomok ako podiel

Racionálne čísla môžu byť tiež interpretované ako podiel, ktorý je výsledkom delenia. Prvé predstavy o zlomku ako podiele sa začínajú budovať už v predškolskom veku, a ďalej sa rozvíjajú na základnej a strednej škole (Lamon, 2012). Spočiatku ide o aktivity, ktoré zahŕňajú spravodlivé rozdeľovanie spojitých objektov. Ide napríklad o pizze, koláče, palacinky a podobne. (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

Rozdeľovanie hrá do istej miery rolu pri každej z interpretácií zlomku (Lamon, 2012).

Pojem rozdeľovanie – akt delenia celku na menšie časti – možno interpretovať ako činnosť, prostredníctvom ktorej vznikajú zlomky. Ide o proces delenia objektu alebo objektov tak, aby sa jednotlivé časti neprekrývali a aby všetky tieto časti tvorili jeden celok. Ak pojem rozdeľovanie použijeme vo vzťahu k zlomkom, jednotlivé časti musia byť rovnako veľké (Lamon, 2012).

Na rozdiel od interpretácie zlomku ako časti celku, v interpretácii zlomku ako podielu uvažujeme o dvoch rôznych veličinách (napr. rozdeliť 3 pizze medzi 4 ľudí).

Nakoľko sa výsledok vzťahuje na numerickú hodnotu a nie na časti vzniknuté spravodlivým rozdeľovaním, v tomto vnímaní zlomku neexistuje obmedzenie týkajúce sa veľkosti zlomku. To znamená, že čitateľ môže byť menší, rovný alebo väčší ako menovateľ. Následne to znamená, že časť, ktorá vznikla spravodlivým rozdelením, musí byť väčšia, menšia alebo rovná ako jednotkové diely, na ktoré bol celok rozdelený (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

Proces rozdeľovania je základom porozumenia racionálnym číslam. Zlomky aj desatinné čísla sú tvorené rozdeľovaním. V prípade desatinných čísel ide o delenie jednotky na 10 rovnakých častí, z ktorých každú možno rozdeliť na 10 rovnakých častí atď. Aj umiestnenie zlomku na číselnej osi záleží od delenia jednotkovej úsečky na rovnaké časti. Proces rozdeľovania je dôležitý aj z hľadiska propedeutiky rovnosti zlomkov. (Lamon, 2012)

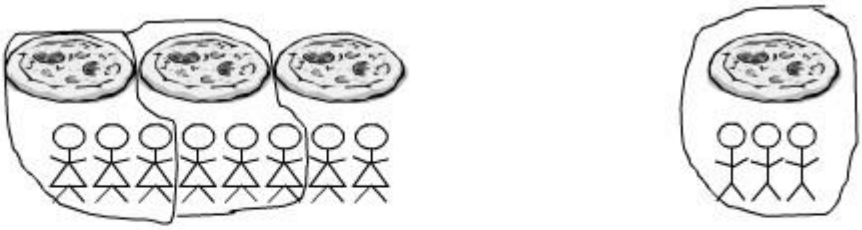
Dôkazom porozumenia zlomku ako podielu je, že žiaci bez väčšej námahy vedia odpovedať na nasledovné otázky (Lamon, 2012):

1. Koľko je jeden diel?
2. Akú časť celkového množstva tvorí jeden diel?

Odpoveď na tieto otázky môžeme demonštrovať v nasledovnej ukážke. Päť ľudí si má rozdeliť tri rovnaké syrové pizze. Ak 3 pizze rozdelíme medzi 5 ľudí, každá z osôb dostane $\frac{3}{5}$ pizze a každý diel tvorí $\frac{1}{5}$ z každej pizze. Z pohľadu kvality je teda jedno, či si 5 ľudí rozdelí 3 pizze alebo 300 pízz. Z pohľadu kvantity to jedno nie je. Každý diel bude tvoriť $\frac{1}{5}$ z jednej pizze. V našom prípade 3-krát $\frac{1}{5}$ z jednej pizze tvorí $\frac{3}{5}$ všetkej pizze.

Ďalšou dôležitou otázkou vo vnímaní zlomku ako podielu je otázka *O koľko viac? O koľko menej?*

Napríklad, ak si 3 chlapci majú rozdeliť jednu pizzu a 8 dievčat si má rozdeliť 3 rovnaké pizze. Kto dostane viac pizze a o koľko?



Obrázok 1.12 Znázornenie úlohy na rozdelenie pizze (Lamon, 2012)

Žiaci spravidla aplikujú informáciu o chlapcoch na skupinu dievčat. Teda zakrúžkujú, že prvú pizzu si rozdelia 3 dievčatá, druhú pizzu si rozdelia 3 dievčatá a na poslednú pizzu zostanú iba 2 dievčatá. Ak tieto 2 zvyšné dievčatá dostanú rovnaké množstvo pizze ako predchádzajúce dievčatá, zvýši $\frac{1}{3}$ pizze, ktorú musíme ešte rozdeliť medzi všetkých 8 dievčat. Teda každé dievča dostane ešte $\frac{1}{8}$ z $\frac{1}{3}$ pizze, čo tvorí $\frac{1}{24}$ pizze. Z toho vyplýva, že každé dievča dostane o $\frac{1}{24}$ pizze viac ako každý chlapec (Lamon, 2012).

Náročnejšia situácia nastane, ak budeme chcieť rozdeliť rôzne druhy pízz.

Napríklad, ak si 4 ľudia chcú spravodlivo rozdeliť 3 syrové a 1 vegetariánsku pizzu. Akú časť z každého druhu pizze dostane každá z osôb? (Lamon, 2012)

Pretože 3 syrové pizze musíme spravodlivo rozdeliť medzi 4 ľudí, každý dostane $\frac{3}{4}$ syrovej pizze. Ak 1 vegetariánsku pizzu rozdelíme medzi 4 ľudí, každý dostane $\frac{1}{4}$ vegetariánskej pizze.

Ďalšou úlohou môže byť prípad, ak máme zadané množstvo pizze, ktoré dostala každá osoba a chceme zistiť koľko a akej pizze bolo objednanej.

Napríklad: *12 ľudí si objednalo pizzu. Každá z osôb dostala $\frac{2}{3}$ syrovej pizze a $\frac{1}{4}$ hríbovej pizze. Aká bola celková objednávka?* (Lamon, 2012)

Syrová pizza: $\frac{2}{3}$ znamená, že 2 pizze si rozdelili 3 ľudia, teda pre 12 ľudí budeme potrebovať 8 syrových pízz.

Hríbová pizza: $\frac{1}{4}$ znamená, že 1 pizzu si rozdelia 4 ľudia, teda pre 12 ľudí budeme potrebovať 3 hríbové pizze.

Celková objednávka pre 12 ľudí bola 8 syrových pízz a 3 hríbové pizze.

Z uvedeného vyplýva, že porozumenie zlomku ako podielu vyžaduje dôkladné zvládnutie <u>delenia na časti</u> a <u>delenia po častiach</u> *„ z angl. partitive and quotitive division“* .

Delenie na časti *„partitive division“* kladie väčší dôraz na rovnaké množstvo, ktoré každý dostane (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

Ako ukážku delenia na časti môžeme uviesť nasledovný príklad: Babička má sviatok a vnúčatám, ktoré ju prišli pozrieť rozdeľuje cukríky. Babička rozdelila 30 cukríkov piatim vnúčatám. Koľko cukríkov dostalo každé vnúča? (Divíšek, 1989) Babička postupovala nasledovne: každému vnúčaťu dala najskôr po jednom cukríku, potom druhý cukrík atď. až kým nerozdala všetky cukríky. Každé vnúča teda dostalo $30:5 = 6$ cukríkov.

Pri tomto type delenia poznáme počet skupín, na ktoré má byť celok rozdelený a celok, ktorý chceme rozdeliť. Chceme zistiť veľkosť časti celku, ktorá je obsiahnutá v jednej skupine. Prakticky ide o hľadanie odpovede na už vyššie spomenuté otázky: Koľko je jeden diel? A akú časť celkového množstva tvorí jeden diel? (Petit et al., 2016)

Delenie po častiach *„quotitive division“* zdôrazňuje počet rovnakých dielov, ktoré vzniknú po rozdelení množstva na rovnaké časti (Charalambous, Pitta-Pantazi, 2006).

Ako ukážku delenia po častiach môžeme uviesť nasledovný príklad: *Babička má sviatok a vnúčatám, ktoré ju prišli pozrieť rozdeľuje cukríky. Babička rozdelila 30 cukríkov. Každé vnúča dostalo 6 cukríkov. Koľkým vnúčatám rozdelila babička cukríky?* (Divíšek, 1989) Babička postupovala nasledovne: prvému vnúčaťu dala 6 cukríkov, druhému vnúčaťu dala 6 cukríkov atď. až kým nerozdala všetky cukríky. Cukríky teda podelila $30:6 = 5$ vnúčatám.

V tomto prípade poznáme celok a veľkosť časti celku, ktorá sa nachádza v jednej skupine. Chceme zistiť počet skupín, na ktoré je celok rozdelený (Petit et al., 2016).

1.3 Porovnávanie a sčítanie zlomkov

1.3.1 Porovnávanie zlomkov

Porovnávanie zlomkov je metodicky náročnejšie ako porovnávanie prirodzených čísel. Zdôrazňuje mnohostnú predstavu zlomku a utvára dobré predstavy na porovnávanie kvantitatívnych vlastností rôzne početných tried. V školskej praxi sa často stretávame s tým, že žiaci porovnávajú dva zlomky buď prevodom na desatinné číslo, alebo použitím tzv. krížového pravidla : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \leftrightarrow ad > bc,\ \ pričom\ a, b, c, d > 0$. Tieto dva postupy sú však formalistické, pretože žiaci často nerozumejú podstate prečo je daný zlomok väčší alebo menší, ide iba o zručnosť použiť pravidlo pre porovnávanie zlomkov. Žiaci by sa však mali naučiť porovnávať zlomky prostredníctvom konkrétnych modelov (Hejný a kol., 1987).

Podľa English & Halford (1995) jedným z kľúčových prvkov pri porovnávaní zlomkov je, aby si žiaci uvedomili, že čím väčší je počet častí, na ktoré chceme danú jednotku rozdeliť, tým menšia bude hodnota zlomku.

Taktiež Nunes et al. (2004) tvrdí, že žiaci si musia uvedomiť že: pri zlomkoch s rovnakým menovateľom platí, že čím väčší je čitateľ zlomku, tým väčší bude zlomok; pri zlomkoch s rovnakým čitateľom platí, že čím väčší je menovateľ zlomku, tým menší bude zlomok.

Z predchádzajúceho tvrdenia Nunes et al. (2004) vyplýva, že zlomky môžeme porovnávať okrem krížového pravidla a prevodu na desatinné číslo aj úpravou na spoločný čitateľ, resp. rovnaký menovateľ zlomku.

Lamon (2012) uvádza nasledovné stratégie pre porovnávanie zlomkov, ktoré súvisia s úpravou na rovnaký čitateľ, resp. rovnaký menovateľ zlomku:

1. Rovnako veľké časti (SSP) – v prípade, že porovnávame zlomky s rovnakým menovateľom bude väčší ten zlomok, ktorého čitateľ je väčší.
2. Rovnaký počet častí (SNP) - v prípade, že porovnávame zlomky s rovnakým čitateľom a rôznym menovateľom, bude väčší ten zlomok, ktorého menovateľ je menšie číslo.

Lamon (2012) tiež uvádza ďalšiu stratégiu, ktorou je tzv. porovnanie s treťou hodnotou – v prípade, že porovnávame zlomky s rôznym čitateľom aj menovateľom, môžeme ich porovnať s treťou hodnotou, napr. väčšie/menšie ako 1, ako $\frac{1}{2}$ a pod.

Pri porovnávaní zlomkov a hľadaní zlomku medzi dvoma jednotkovými zlomkami s po sebe idúcimi menovateľmi sme pozorovali rôzne stratégie riešenia, ktorými však žiaci určili maximálne jedno hľadané číslo. Ako uvádza Lamon (2012), pri určovaní takéhoto zlomku môžeme použiť tento postup:

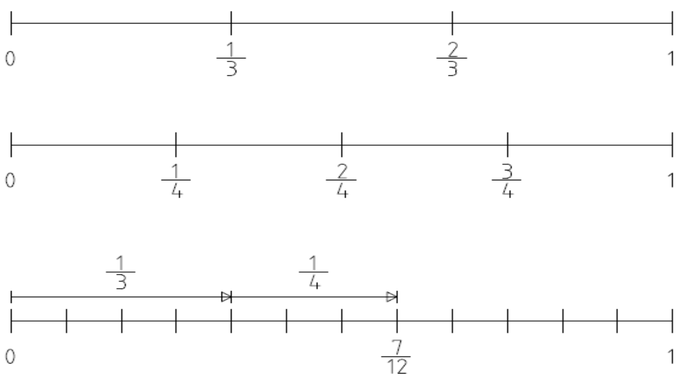
$\frac{1}{7} < \frac{1}{6} = \frac{\frac{7}{6}}{7} = \frac{1\frac{1}{6}}{7}$ porovnávame teda zlomky s rovnakým menovateľom,

hľadáme číslo x , pre ktoré platí: $1 < x < 1\frac{1}{6} \quad \Rightarrow$

$x = 1\frac{1}{7}; 1\frac{1}{8}; 1\frac{1}{9}; 1\frac{1}{10} \ldots ,$

existuje nekonečne veľa čísel, ktoré môžu byť v čitateli hľadaného zlomku, čím dostávame riešenia napríklad: $\frac{8}{49}; \frac{9}{56}; \frac{10}{63}; \frac{11}{70}; \ldots$

Ďalšími oblasťami, ktoré sa ukázali ako problémové, boli práca na číselnej osi a sčítanie zlomkov. Je zaujímavé použiť pri modelovaní sčítania zlomkov číselnú os, na ktorú nanášame jednotlivé zlomky ako vektory s danou veľkosťou, čím súčet zlomkov pretransformujeme na súčet vektorov.



Obrázok 1.13 Modelovanie sčítania zlomkov na číselnej osi

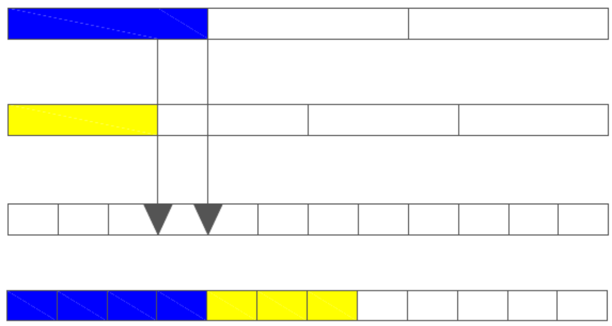
Ako žiaci postupne spoznávajú množinu zlomkov, zväčša sa dostávajú od zoraďovania a porovnávania zlomkov cez nájdenie ekvivalentných zlomkov až ku sčítavaniu zlomkov (OECD, in Petit et al., 2016).

1.3.2 Sčítanie zlomkov

Hlavná idea sčitovania zlomkov je "úprava na spoločného menovateľa". Sčitovaniu $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ prekáža to, že sčitované objekty sú rôznej kvality. Musíme ich teda vyjadriť pomocou rovnakej kvality – jednotnej miery, ktorou je spoločný menovateľ.

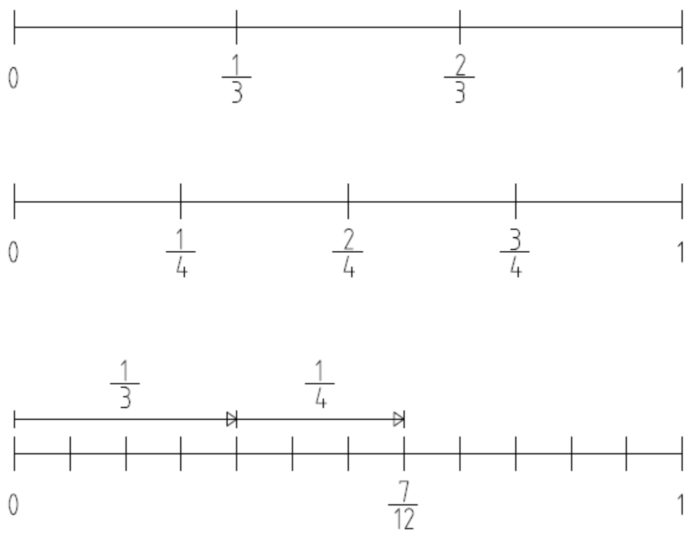
Sčitovanie zlomkov môžeme znázorniť pomocou geometrických modelov: tyč (úsečka), koláč (kruh) a čokoláda (štvorec alebo obdĺžnik). V nasledovnej ukážke ponúkame realizáciu súčtu $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ pomocou jednotlivých modelov (Hejný a kol., 1987).

1. Tyč rozdelíme najprv na tretiny, potom na štvrtiny. Nájdeme najmenšiu spoločnú časť oboch delení, nazvime ju dielik. Tento dielik nanesieme po dĺžke celej tyče. Zistíme, že dielik môžeme na tyč naniesť 12-krát, a že $\frac{1}{3} = 4$ dieliky a $\frac{1}{4} =3$ dieliky. Teda $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 7$ dielikov $= \frac{7}{12}$.



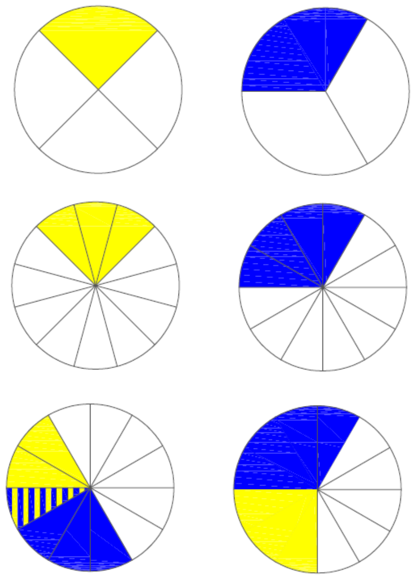
Obrázok 1.14 Sčítanie zlomkov na tyčovom modeli

Model tyč je úzko prepojený s číselnou osou, pomocou ktorej môžeme sčítať zlomky ako 2 vektory. Napríklad $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ sčítame nasledovne: Nakreslíme si 3 zhodné úsečky dĺžky 1 jednotka. Prvú úsečku rozdelíme na 3 časti a vyznačíme časť, ktorá reprezentuje $\frac{1}{3}$. Druhú úsečku rozdelíme na 4 časti a vyznačíme časť, ktorá reprezentuje $\frac{1}{4}$. Na tretej úsečke zostrojíme grafický súčet úsečiek dĺžky $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$. Opäť môžeme nájsť najmenší dielik, ktorý vytvorí $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$. Zistíme, že tento dielik sa na jednotkovú úsečku môžeme naniesť 12-krát, a že $\frac{1}{3}$ = 4 dieliky a $\frac{1}{4}$ =3 dieliky. Teda $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = 7\ dielikov = \frac{7}{12}$.



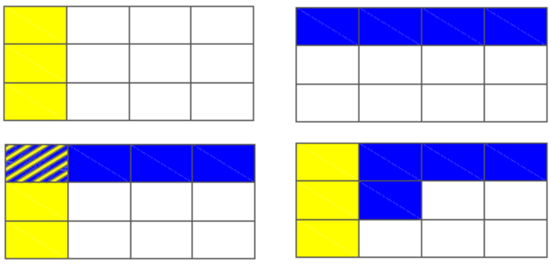
Obrázok 1.15 Sčítanie zlomkov na číselnej osi

2. Koláč rozdelíme na tretiny a jednu z nich vyznačíme. Druhý koláč rozdelíme na štvrtiny a jednu z nich vyznačíme. Nájdeme najmenšiu spoločnú časť oboch delení koláča - dielik. Zistíme, že koláč možno rozdeliť na 12 rovnakých častí. Do $\frac{1}{4}$ koláča sa zmestia tri dieliky, do $\frac{1}{3}$ koláča štyri dieliky. Spolu teda $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ =7 kúskov = $\frac{7}{12}$



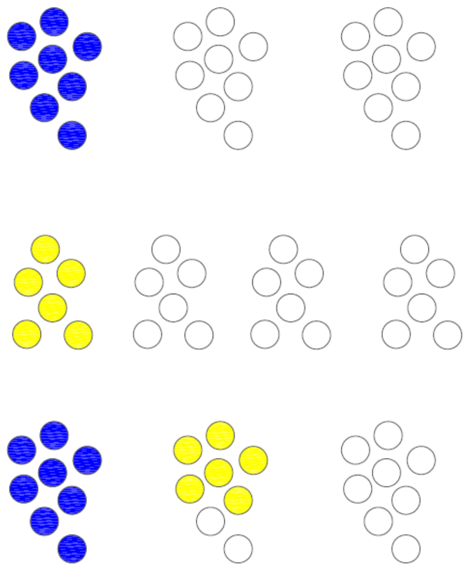
Obrázok 1.16 Sčítanie zlomkov na modeli koláč

3. Čokoláda. Zoberieme „špeciálnu" čokoládu: na šírku bude mať 3 dieliky, na dĺžku 4, spolu teda 12 dielikov. Čokoláda má 4 stĺpce a 3 riadky. Preto 1 stĺpec (= 3 obdĺžniky) je štvrtina a jeden riadok (= 4 obdĺžniky) je tretina celej čokolády. Takže $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ 3 obdĺžniky + 4 obdĺžniky = 7 obdĺžnikov $=\frac{7}{12}$ (Hejný a kol., 1987).



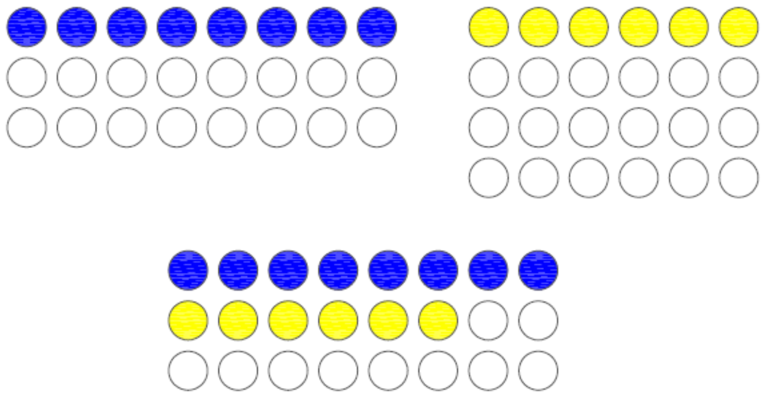
Obrázok 1.17 Sčítanie zlomkov na modeli čokoláda

4. Kubínová uvádza aj guľôčkový model. Ide o diskrétny model zlomku. Autorka rozlišuje kardinálny a ordinálny prístup pri sčítaní daných zlomkov.
   a) **Kardinálny prístup** – máme napr. 24 guľôčok, ktoré najskôr rozdelíme na 3 rovnaké časti (tretiny), vyznačíme $\frac{1}{3}=8$ guľôčok, potom na štyri časti (štvrtiny), vyznačíme $\frac{1}{4}=6$ guľôčok. Do výsledku vyznačíme $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=8$ guľôčok + 6 guľôčok = 14 guľôčok$=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$.



Obrázok 1.18 Sčítanie zlomkov guľôčkovým modelom – kardinálny prístup

b) **Ordinálny prístup** – postupujeme podobne ako pri kardinálnom prístupe, ale guličky máme zoradené v riadkoch a stĺpcoch.



Obrázok 1.19 Sčítanie zlomkov guľôčkovým modelom – ordinálny prístup

Každý model odráža istú skupinu životných skúseností a je propedeutikou aplikácie zlomkov v istých oblastiach činnosti. Vylúčenie ktoréhokoľvek z modelov ochudobňuje žiacke predstavy o príslušné spektrum skúseností a aplikácií (Hejný, 1987).

2 TVORBA UČEBNÝCH POMÔCOK A ICH VYUŽITIE PRI RIEŠENÍ ÚLOH

Prostredníctvom učebných pomôcok získavajú žiaci jasné a neskreslené predstavy. Keď si učebnú pomôcku postupne sami vytvoria, ich cesta k porozumeniu je úspešnejšia.
Hejný (2004) vo svojej práci dáva výzvu pre učiteľov matematiky: Prečo sa žiaci nesnažia pochopiť zlomky a uprednostňujú učenie spamäti? Hovorí, že hlavnou príčinou učenia sa naspamäť je nízke intelektuálne sebavedomie a vypestovaný štýl učenia. Preto okrem využívania školských učebných pomôcok je dobré žiakov motivovať, aby si učebnú pomôcku vytvorili sami. Vedomosti a zručnosti, ktoré žiaci získajú vlastnou tvorivosťou sú pre žiaka omnoho zaujímavejšie a efektívnejšie z hľadiska poznávacieho procesu. Žiak dokáže nové vedomosti nielen lepšie pochopiť, ale si ich aj lepšie zapamätať a využiť ich pri riešení úloh. Na zvládnutie učiva o zlomkoch je veľmi dôležité venovať dostatočný čas manipulačnej činnosti s rôznymi modelmi zlomkov - spojitými aj diskrétnymi (spojitými modelmi rôznych tvarov – úsečka, kruh, trojuholník, štvorec, obdĺžnik, päťuholník, šesťuholník a diskrétnymi modelmi – kardinálnymi aj ordinálnymi). Dôležitú úlohu pri tom zohráva prepojenie učiva o zlomkoch s reálnym životom a skúsenosťou, ktorú žiaci získali pri priamej aktívnej činnosti s modelmi, ale hlavne pri samotnej výrobe modelov.

2.1 Tvorba učebných pomôcok pre prácu so zlomkami

Nasledujúce učebné pomôcky zamerané na modely a modelovanie zlomkov boli vytvorené žiakmi siedmeho ročníka základnej školy. Všetky pomôcky sú vyrobené z dostupných materiálov, prípadne sú využité hotové, zakúpené pomôcky. Každá z nasledujúcich pomôcok reprezentuje jeden zo spojitých modelov (obdĺžnik, kruh, úsečka) a tiež diskrétne modely. Ako už bolo spomenuté, rozdeľovaním celku na rovnaké časti praktickou činnosťou pri tvorbe pomôcok: strihaním, krájaním, skladaním, kreslením sa u žiakov rozvíjalo porozumenie zlomku ako časti celku na neformálnej úrovni. Odporúčame pri tejto činnosti prácu v skupinách, minimálne vo dvojiciach.

Okrem ďalej uvedených vlastných pomôcok môžeme využívať aj rôzne hračky, skladačky, gumovacie podložky atď. zakúpené v obchode. Dôležité je, aby obsahovali objekty zložené alebo rozdelené na rovnaké časti, napríklad zhodné kocky, kruhy, obdĺžniky, kvádre a podobne.

2.1.1 Kruhová zlomkovnica

Pomôcky: farebné gumené podložky, pravítko, kružidlo, ceruzka, nožnice, uhlomer, fixka

Postup:

Na farebnú gumenú podložku narysujeme pomocou kružidla kruhy s priemerom 20 cm a vystrihneme ich. Podľa farieb podložiek tak získame kruhy rôznych farieb. Kruhy postupne rozdelíme na rovnaké časti, ktorých veľkosť závisí od počtu častí. Jednotlivé časti určíme výpočtom veľkosti stredového uhla jednej časti a následne presne pomocou uhlomeru a pravítka kruh rozdelíme na kruhové výseky rovnakých veľkostí. Získame tak polovicu, tretinu, štvrtinu, pätinu, šestinu, osminu, devätinu, desatinu, dvanástinu, pätnástinu, osemnástinu, dvadsatinu kruhu. Kruh môžeme rozdeliť aj na 7 alebo 11 častí, no meranie už nebude také presné. Nakoniec vzniknuté časti kruhov označíme zápisom v tvare zlomku prislúchajúcej časti celku.

Obrázok 2.1 Ukážky kruhových zlomkovníc z gumenej podložky

Podobne je možné vyrobiť so žiakmi zlomkovnice rozdeľovaním štvorca, obdĺžnika, pravidelného n-uholníka. Pri výrobe je možné použiť aj lacnejší variant a strihať zlomkovnice z farebného papiera, kde ale nie je zaručená pri častejšom používaní taká životnosť, ako pri zlomkovniciach z gumenej podložky.

Didaktická poznámka

Pri rozdeľovaní kruhu na rovnaké časti si žiaci precvičia hľadanie deliteľov čísla 360. Ak chceme dostať presné výsledky v tvare prirodzeného čísla, kruh budeme rozdeľovať na taký počet častí, ktorý bude určený deliteľmi čísla 360, teda 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18,

20. Kvôli názornosti a praktickosti neodporúčame ďalšie delenie, aby kruhové výseky mali veľkosť vhodnú na ďalšiu manipuláciu.

Žiaci si zároveň zopakujú vlastnosti a rozdeľovanie uhla v kruhu, meranie uhlomerom, rysovanie.

2.1.2 Číselná os

Pomôcky: plavecká pomôcka – penový slíž (1 kus pre dvoch žiakov), orezávač, výkres alebo kancelársky papier, špajdle, lepiaca páska, nožnice, pravítko, ceruzka. Pre zlepšenie kvality môžeme použiť laminátovacie fólie, laminátovací stroj, tlačiareň

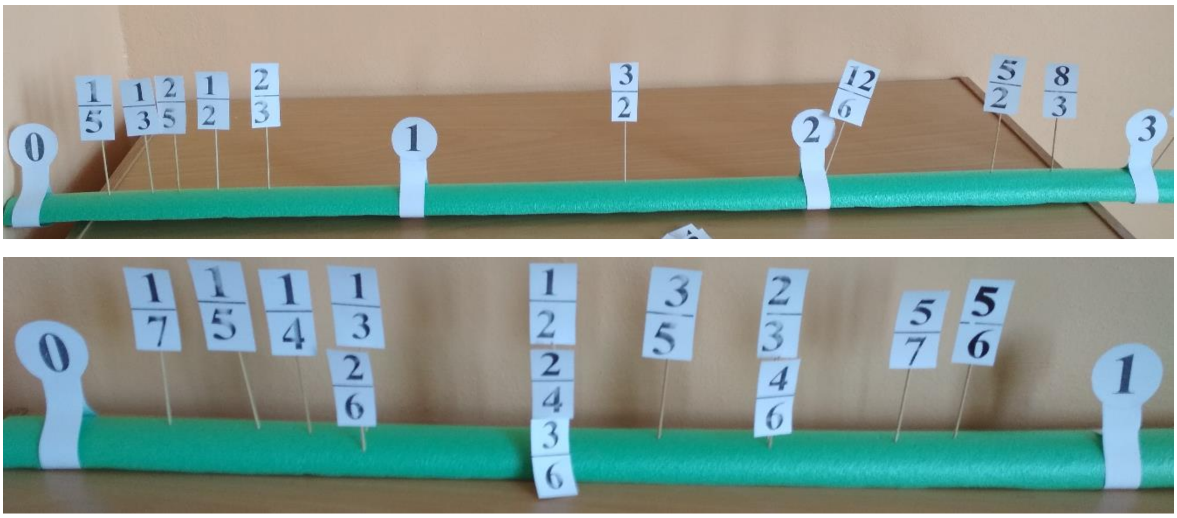
Postup:

Plaveckú pomôcku, penový slíž, prerežeme pozdĺžne na dve časti, čím zabezpečíme stabilitu položenia pomôcky na stôl a zároveň vzniknú dve pomôcky pre dvoch žiakov. Z výkresu vystrihneme kartičky na ktoré napíšeme najskôr celé čísla a potom rôzne čísla v tvare zlomku. Podľa možností môžeme čísla napísať na počítači, vytlačiť ich a zalaminovať. Každú karičku s číslom prilepíme lepiacou páskou na drevenú špajdľu primeranej dĺžky. Penový slíž bude predstavovať model číselnej osi, takže si zvolíme na jeho začiatku miesto na zapichnutie čísla 0 a určíme si dĺžku jednotkovej úsečky, podľa ktorej zapichneme ďalšie celé čísla na číselnú os. Následne umiestňujeme kartičky so zlomkami čo najpresnejšie na číselnú os podľa zadania.

Didaktická poznámka

Je dobré vopred určiť, aké zlomky budú na karičkách, aby žiaci mohli umiestňovať na os rôzne zlomky a tiež navzájom ekvivalentné zlomky. Takto si precvičujú porovnávanie, usporiadanie a tiež rovnosť zlomkov.

Môžeme postupovať postupným delením jednotkovej úsečky napríklad na polovice, štvrtiny, osminy, tretiny, šestiny a pod., pracovať s pravými aj nepravými zlomkami (väčšími ako 1), prípadne si pripraviť kartičky aj so zmiešanými číslami.



Obrázok 2.2 Ukážky modelu číselnej osi z plaveckého slíža

2.1.3 Zlomková stena

Pomôcky: farebné gumené podložky (12 kusov rôznych farieb vystačí pre šiestich žiakov), pravítko, ceruzka, nožnice, fixka, kovový krúžok na kľúče

Postup:

Gumené podložky rôznych farieb rozstriháme na pásy rovnakej dĺžky (asi 30 cm) a šírky (3cm). Pásik predstavuje model úsečky, ktorý budeme ďalej deliť na rovnaké časti. Každý pásik rozdelíme na iný počet rovnakých častí, ktorých dĺžku určíme výpočtom. Ak chceme pracovať v množine prirodzených čísel, určíme delitele čísla 30 a následne meraním označíme deliace body. Získame tak polovicu, tretinu, pätinu, šestinu, desatinu, pätnástinu úsečky. Keďže pracujeme s pravítkom, vieme odmerať aj dĺžky v tvare desatinného čísla, a tak môžeme získať aj štvrtiny, osminy, dvanástiny.

Didaktická poznámka

Pri rozdeľovaní úsečky danej dĺžky na rovnaké časti si žiaci precvičia hľadanie deliteľov čísla, ktoré určuje jej dĺžku (v našom prípade je to číslo 30). Ak chceme dostať presné výsledky v tvare prirodzeného čísla, úsečku budeme rozdeľovať na taký počet častí, ktorý bude určený deliteľmi čísla 30, teda 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Kvôli názornosti a praktickosti neodporúčame ďalšie delenie, aby časti úsečky mali dĺžku vhodnú na ďalšiu manipuláciu. Môžeme žiakom ukázať aj delenie úsečky na akýkoľvek počet rovnakých častí, ktoré vychádza z pomeru (ak chceme úsečku rozdeliť presne napríklad na sedminy, rozdelíme ju v pomere 1:6, čím graficky získame dĺžku jednej časti).

Príslušné časti na každom pásiku označíme čiarami. Nakoniec každú časť označíme zlomkami vyjadrujúcimi veľkosť jednej časti, ktoré napíšeme na pásiky. Túto učebnú pomôcku môžeme využívať pri určovaní časti z celku, celku z danej časti, pri porovnávaní, krátení a rozširovaní zlomkov.


Obrázok 2.3 Ukážka zlomkovej steny z gumenej podložky

2.1.4 Penové valce

Pomôcky: plavecká pomôcka – penový slíž (3 kusy pre dvoch žiakov), orezávač, pravítko, ceruzka, akrylové farby, štetec, fixka

Postup:

Didaktický princíp prípravy tejto učebnej pomôcky je analogický ako pri zlomkovej stene v podkapitole 2.1.4. s tým rozdielom, že pásiky zlomkovej steny tvoria spojitý model a penové valce budú predstavovať diskrétny model zlomku. Penový slíž rozdelíme krájaním na rovnako dlhé časti (asi 30 cm), ktoré budú tvoriť celok a zafarbíme ich rôznymi farbami. Každý valec ďalej rozdelíme na iný počet rovnakých častí, ktorých dĺžku určíme výpočtom. Jednotlivé valce nakrájame na polovice, tretiny, štvrtiny a pod., pričom dodržíme rovnakú farbu kmeňových zlomkov s inými modelmi (kruhová zlomkovnica, zlomková stena) rozdelenými na rovnaký počet častí. Modely môžeme využívať pri riešení úloh na zlomok ako časť celku, pri porovnávaní, krátení, rozširovaní, sčítaní a odčítaní zlomkov.

Obrázok 2.4 Ukážka modelov z penových valcov

Didaktická poznámka

Pri tvorbe uvedených učebných pomôcok odporúčame farebne rovnako rozlíšiť časti celku vyjadrujúce rovnaký kmeňový zlomok pri jednotlivých modeloch. Takéto farebné rozlíšenie môže pomôcť k lepšej a rýchlejšej orientácii pri modelovaní úloh na porovnávanie, rozširovanie, krátenie, sčítanie a odčítanie zlomkov.

Výrobou vlastných pomôcok sme podporili u žiakov aktivitu, tvorivosť, predstavivosť, záujem žiakov o preberané učivo, manuálne zručnosti žiakov a v konečnom dôsledku žiaci vedeli lepšie reagovať na preberané učivo. Takto nadobudnuté vedomosti sú predpokladom pre ich dlhšiu trvácnosť, systematickosť a ľahšie uplatnenie pri riešení úloh. Vlastnoručne vyrobené pomôcky si viacej vážili a ohľaduplnejšie s nimi zaobchádzali.

2.2 Využitie pomôcok pri riešení úloh na hodinách matematiky

Žiaci sa so zlomkami stretávajú oveľa skôr, ako sa o nich učia v rámci vzdelávania na základnej škole. Z bežného života poznajú pojmy polovica (pol chleba, polčas vo futbale, určovanie času), tretina (hokej), štvrtina (štvrť na tri, ...). Na primárnom stupni vzdelávania delia celok na skupiny danej veľkosti (delenie podľa obsahu), delia celok na daný počet rovnakých častí (delenie objektu na rovnaké časti), pomenúvajú jednu časť celku (polovica, tretina, štvrtina), určujú, aká časť celku je vyznačená na geometrickom modeli (dve tretiny, tri štvrtiny, polovica). K pochopeniu a upevneniu týchto pojmov dochádza až na nižšom strednom stupni vzdelávania a to v siedmom ročníku. Osvojujú si pojmy celok, zlomok ako časť z celku, znázornenie zlomkovej časti celku, znázornenie zlomkov na číselnej osi, zlomok ako číslo, zlomková čiara, čitateľ a menovateľ zlomku, rovnosť zlomkov, krátenie (zjednodušovanie) zlomkov, rozširovanie zlomkov, základný tvar zlomku, pravý a nepravý zlomok, zmiešané číslo, porovnávanie zlomkov, sčítanie zlomkov, odčítanie zlomkov, rovnaký a nerovnaký menovateľ zlomkov, spoločný menovateľ, spoločný násobok, krížové pravidlo, násobenie zlomkov, delenie zlomkov, zlomková časť z celku, prevrátený zlomok.

2.2.1 Zlomok ako časť celku

V učive o zlomkoch sa žiaci najskôr stretávajú so zlomkom ako časťou celku, v ktorej sa venujú rozdeľovaniu celku na rovnaké časti. Toto rozdeľovanie je znázorňované pri spojitých modeloch tvaru obdĺžnika, kruhu, úsečky a pri rozdeľovaní množstva objektov na diskrétnych modeloch. Riešia úlohy, kde z obrázkov určujú aká časť celku je zvýraznená, ale i zo zadanej časti celku určujú (vypočítavajú) celok. Pri zisťovaní časti celku je nutné, aby žiaci brali do úvahy základ (celok), z ktorého časť vypočítavajú, pretože ten sa môže líšiť.

Je potrebné venovať dostatok času na porozumenie zlomku ako časti celku, pretože z tejto časti učiva vytvárame základnú terminológiu a odvodzujeme operácie so zlomkami.

Pre správne pochopenie pojmu zlomok považujeme za dôležité na hodinách so žiakmi pracovať s rôznymi modelmi.

Ďalej uvádzame ukážky úloh riešených s využitím modelov, ktorých tvorbu uvádzame v podkapitole 2.1. Riešenia uvádzame opisom otázok a odpovedí v rámci vyučovania matematiky.

Určenie zlomku z danej časti

Úloha 1: *Žiaci mali na domácu úlohu vyriešiť 3 úlohy. Janka mala správne vyriešenú 1 úlohu. Určte zlomkom, akú časť domácej úlohy vyriešila Janka nesprávne.*

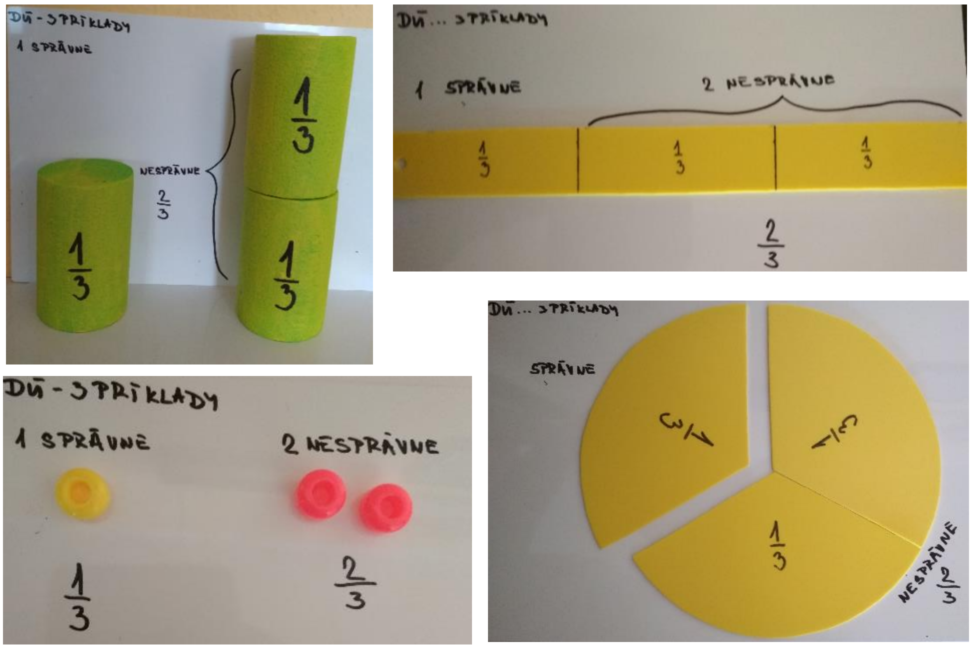
Riešenie:

Koľko úloh z domácej úlohy Janka vyriešila správne? Správne vyriešila 1 úlohu.

Koľko úloh vyriešila nesprávne? Nesprávne vyriešila 3-1 = 2 úlohy. (Čitateľ je 2).

Koľko úloh bolo spolu na domácu úlohu? Na domácu úlohu boli 3 úlohy. (Menovateľ je 3).

Akú časť domácej úlohy mala Janka nesprávne? Janka mala nesprávne $\frac{2}{3}$ domácej úlohy.



Obr. 2.5 Riešenie Úlohy 1 pomocou rôznych modelov (určenie zlomku z danej časti)

Určenie časti celku

Úloha 2: Koľko minút sú dve tretiny hodiny(60 min.)?

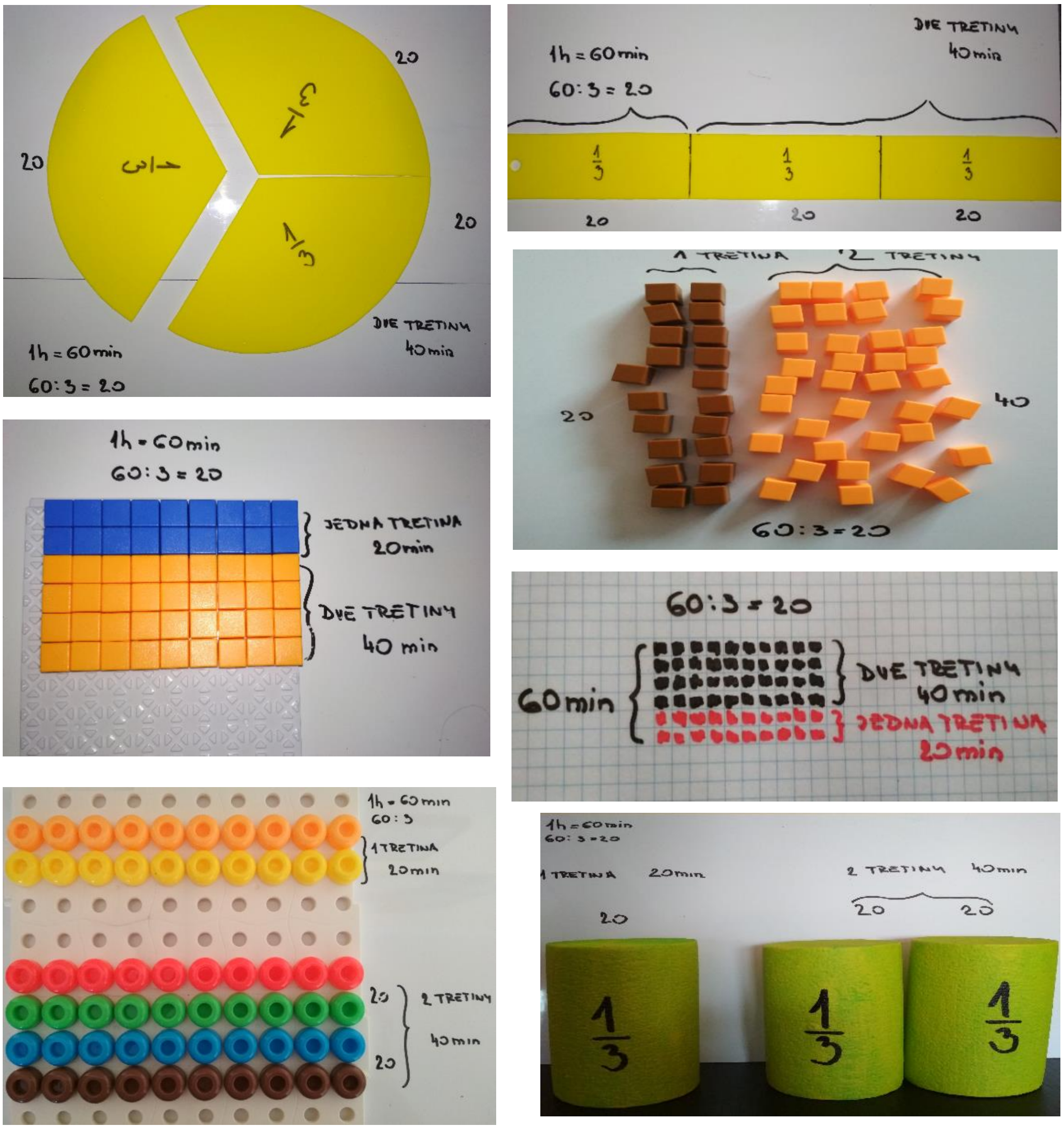
Riešenie:

Koľko minút má hodina? Hodina má 60 min.

Na koľko rovnakých častí je rozdelená hodina ? Hodina je rozdelená na tretiny.

Koľko minút predstavuje jedna tretina hodiny? Tretina hodiny je 60:3=20, teda 20 min.

Koľko minút predstavujú dve tretiny hodiny? Dve tretiny hodiny sú 2.20=40, teda 40 min.



Obrázok 2.6 Riešenie Úlohy 2 pomocou rôznych modelov (určenie časti celku)

Určenie celku z danej časti

Úloha 3: Koľko žiakov je v triede, ak šesť osmín žiakov tvoria dievčatá a chlapcov je 6?

Riešenie:

Na koľko rovnakých častí rozdelíme žiakov v triede? Počet žiakov rozdelíme na 8 častí.

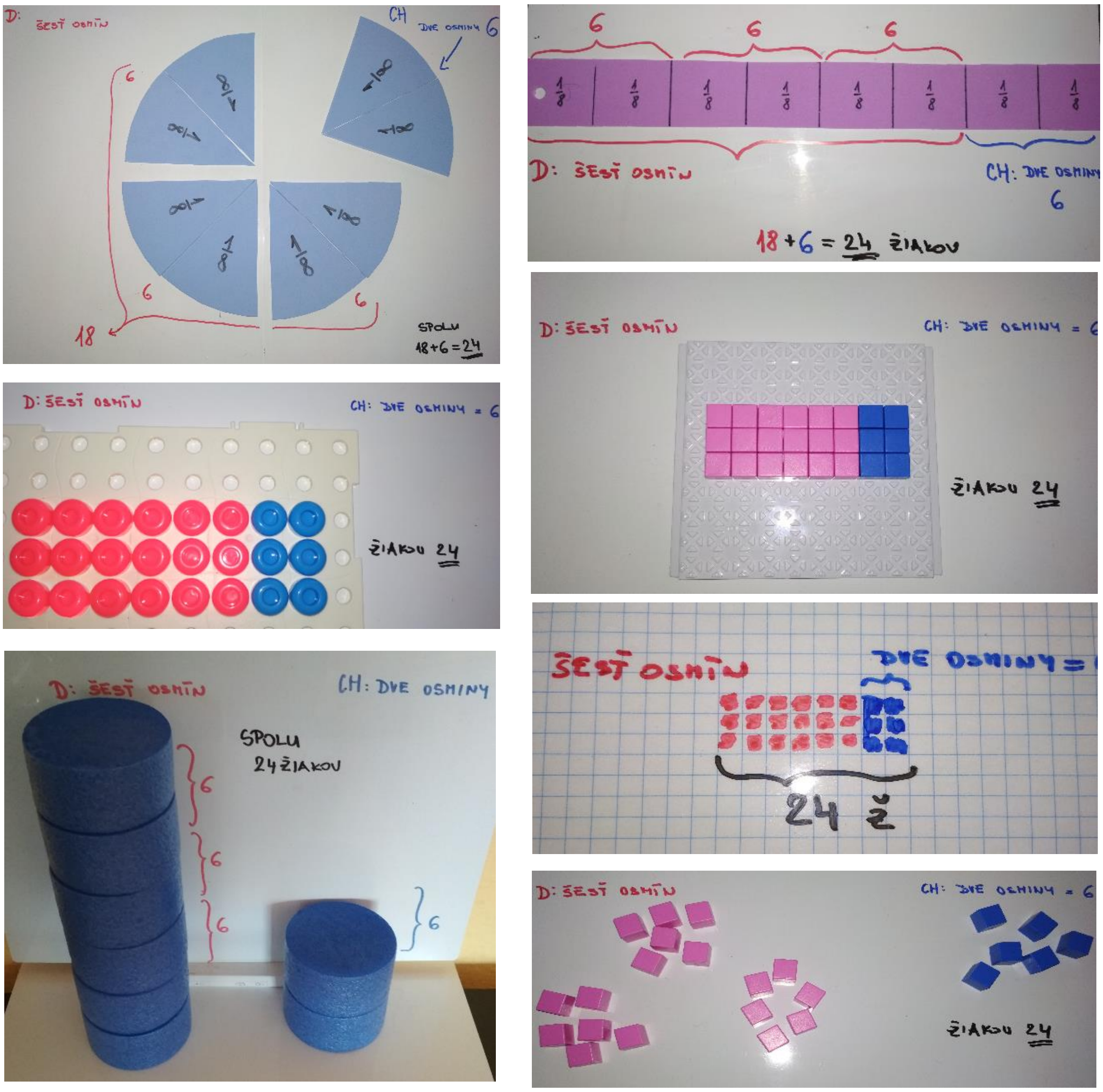
Koľko častí z celku tvoria dievčatá? Dievčatá tvoria 6 častí z osem.

Koľko častí z celku tvoria chlapci? Chlapci tvoria 8-6= 2, teda 2 časti z celku.

Koľko žiakov tvorí jednu časť? Využitím známeho počtu chlapcov, určíme jednu časť 6:2=3, teda sú to 3 žiaci.

Koľko je dievčat v triede? V triede je 6.3 = 18, čiže dievčat je 18.

Koľko žiakov je v triede? V triede je 18+6 = 24, teda žiakov je 24.



Obrázok 2.7 Riešenie Úlohy 3 pomocou rôznych modelov (určenie celku z danej časti)

2.2.2 Ekvivalencia a porovnávanie zlomkov

Pri modelovaní ekvivalencie zlomkov budeme využívať aj číselnú os. Práca s našou učebnou pomôckou umožňuje umiestnenie zlomkov (delenie intervalu na rovnaké časti), urobiť len odhadom. Je potrebné si uvedomiť, že obrazom zlomku na číselnej osi je bod a jednému bodu na číselnej osi prislúcha nekonečne veľa ekvivalentných zlomkov.

Úloha 4: Znázorni na číselnej osi zlomky: $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{2}$

Obrázok 2.8 Umiestnenie zlomkov na modeli číselnej osi (pravé a nepravé zlomky)

Úloha 5: Znázorni na číselnej osi zlomky: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$

Umiestnením týchto zlomkov na číselnú os žiaci sami zistia, že sa všetky tri zobrazia do toho istého bodu, teda sú ekvivalentné.

Obrázok 2.9 Umiestnenie zlomkov na modeloch číselnej osi (ekvivalentné zlomky)

Rozširovanie a krátenie zlomkov

Rozširovať zlomok znamená násobiť čitateľa aj menovateľa rovnakým číslom rôznym od nuly.

$\forall a, b, c \in Z; b \neq 0, c \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{a\,.\,c}{b\,.\,c}$

Krátiť zlomok znamená deliť čitateľa aj menovateľa rovnakým číslom rôznym od nuly.

$\forall a, b, c \in Z; b \neq 0, c \neq 0$: $\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$

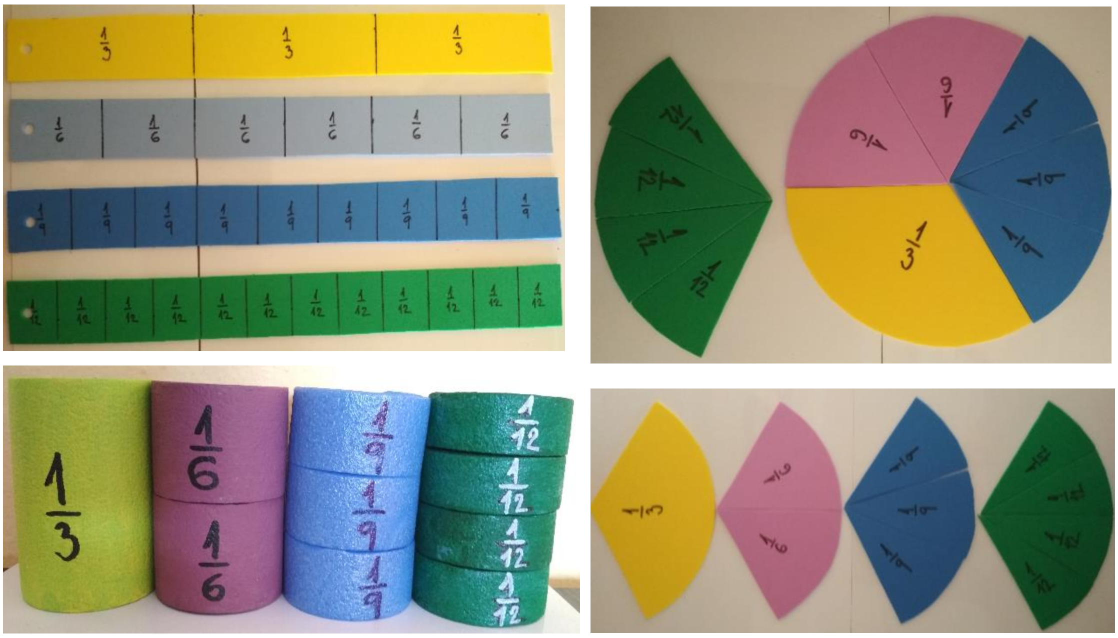
Pri rozširovaní a krátení zlomkov kladieme dôraz na pojem *zlomok v základnom tvare*, teda kde čitateľ a menovateľ sú nesúdeliteľné čísla.

Na modelovanie rozširovania a krátenia zlomkov odporúčame použiť pomôcky: zlomková stena, valce z plaveckého slížu, ale aj kruhová zlomkovnica. Týmto modelovaním vieme žiakom názorne ukázať, že pri rozširovaní a krátení zlomkov sa hodnota zlomku nemení (ekvivalentné zlomky).

Úloha 6: Zlomok $\frac{1}{3}$ rozšír číslami a) 2, b) 3, c) 4.

Riešenie:

a) $\frac{1\,.\,2}{3\,.\,2} = \frac{2}{6}$ b) $\frac{1\,.\,3}{3\,.\,3} = \frac{3}{9}$ c) $\frac{1\,.\,4}{3\,.\,4} = \frac{4}{12}$



Obrázok 2.10 Modelovanie rozširovanie zlomkov

Úloha 7: Pomocou zlomku vyjadrite akú časť sadu tvoria 4 jablone, ak v sade je spolu 12 ovocných stromov?

Riešenie:

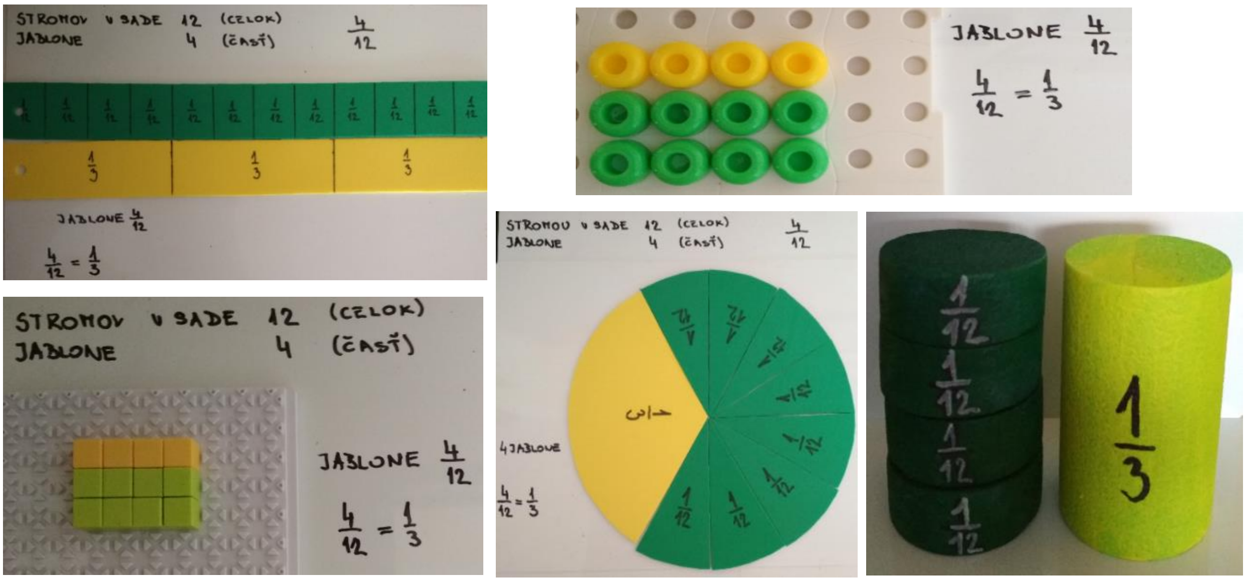
Akú časť tvoria 4 stromy z 12?

Aký je počet jabloní v sade? V sade sú 4 jablone, čo je časť z celkového počtu stromov (číslo v čitateli zlomku).

Aký je počet všetkých ovocných stromov? Všetkých stromov je 12, čo je počet častí na ktorý je celok rozdelený (číslo v menovateli zlomku).

Výsledný zlomok $\frac{4}{12}$ ale nie je v základnom tvare. Musíme ho krátiť nenulovým číslom tak, aby čísla v čitateli a menovateli boli nesúdeliteľné, teda:

$\frac{4}{12} = \frac{4:4}{12:4} = \frac{1}{3}$. Jablone tvoria $\frac{1}{3}$ stromov v sade.



Obrázok 1.11 Modelovanie krátenia zlomkov

Porovnávanie zlomkov

Najčastejším problémom pri porozumení porovnávaniu zlomkov u žiakov je zmena nerovnosti. Napríklad : $4 < 8$, ale $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$. Táto dilema pramení z dlhodobého používania prirodzených čísel. Práve modelovaním si žiaci môžu uvedomiť, že čím väčší je počet častí na ktoré je celok rozdelený, tým menšia je veľkosť jednej časti.

Pre rovnosť zlomkov dvoch zlomkov $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ platí, že $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$

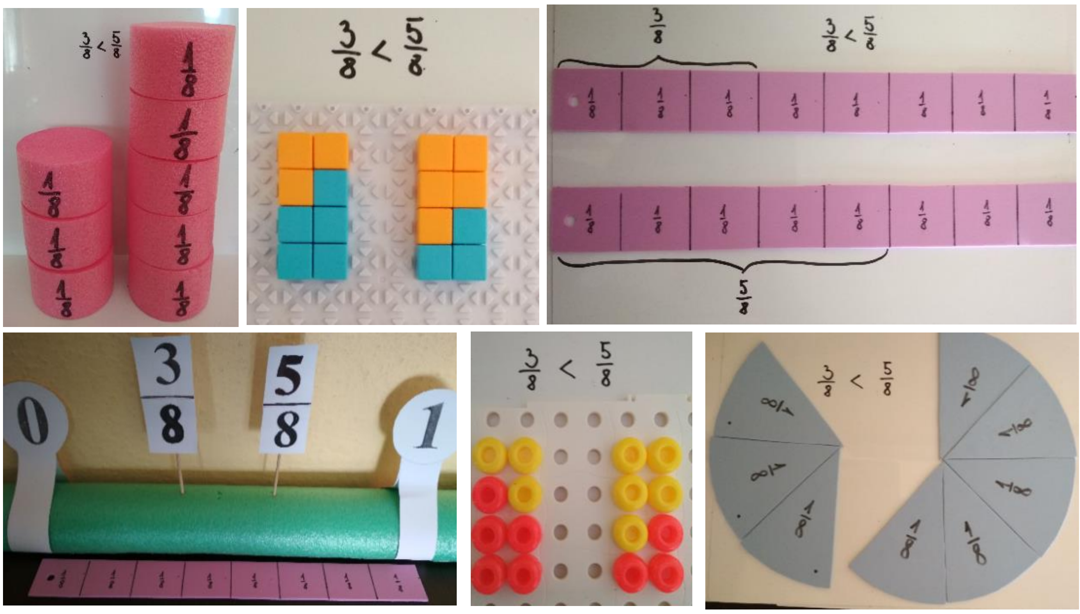
Porovnávanie zlomkov s rovnakým menovateľom

Pri manipulatívnej činnosti s modelmi by mali byť žiaci schopní sami odvodiť pravidlo pre porovnávanie zlomkov s rovnakým menovateľom: *Z dvoch zlomkov s rovnakým menovateľom je väčší ten, ktorý má väčšieho čitateľa.* Porovnávame počet rovnako veľkých častí.

Úloha 8: Porovnajte zlomky $\frac{3}{8}$ a $\frac{5}{8}$.

Riešenie:

$\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$



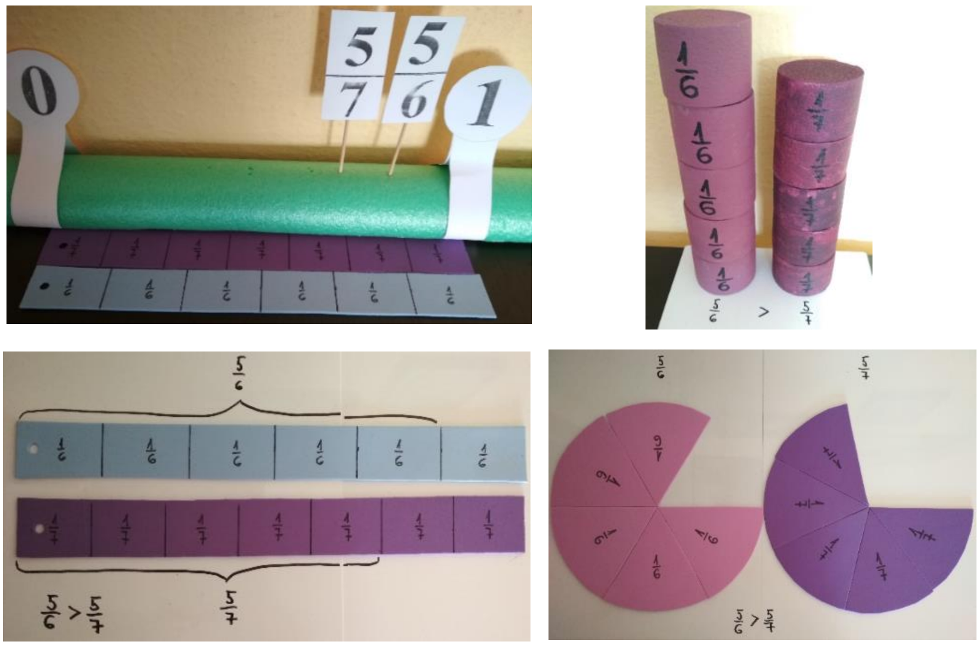
Obrázok 2.12 Modelovanie porovnávania zlomkov s rovnakým menovateľom

Porovnávanie zlomkov s rovnakým čitateľom

Podobne ako v predchádzajúcom prípade porovnávanie zlomkov s rovnakým čitateľom pomáha žiakom pochopiť modelovanie, pri ktorom by mali sami odvodiť pravidlo: *Z dvoch zlomkov s rovnakým čitateľom je väčší ten, ktorý ma menšieho menovateľa.* Čím väčšie je číslo v menovateli, tým menšia je veľkosť jednej časti.

Úloha 9: Porovnajte zlomky $\frac{5}{6}$ a $\frac{5}{7}$.

Riešenie: $\frac{5}{6} > \frac{5}{7}$



Obrázok 2.13 Modelovanie porovnávania zlomkov s rovnakým čitateľom

Porovnávanie zlomkov s rôznymi čitateľmi aj menovateľmi

Pri porovnávaní zlomkov s rôznym menovateľmi môžeme použiť viaceré stratégie. Najčastejšie sa v školskej praxi používa úprava zlomkov na rovnaký menovateľ.

Zlomky prevedieme na spoločného menovateľa buď nájdením najmenšieho spoločného násobku menovateľov, alebo rozšírením oboch zlomkov tak, aby mali rovnakého menovateľa. Už pri modelovaní rozširovania zlomkov žiaci zistia, že rozšírením zlomkov získajú ekvivalentné zlomky a tie dokážu porovnať. Touto skúsenosťou sa utvrdia v dôležitom poznatku, že porovnávať môžeme len rovnako veľké časti celku.

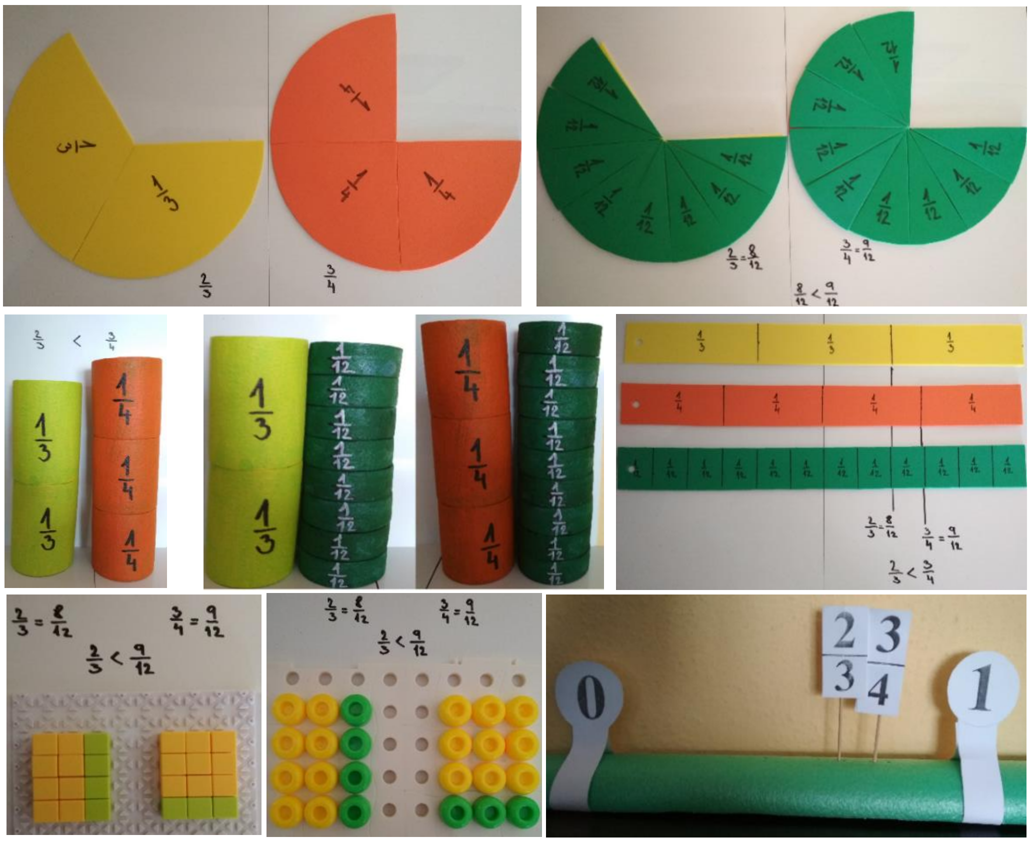
Úloha 10: Porovnajte zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$.

Riešenie: $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\ \square\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

$$\frac{\mathbf{2 . 4}}{\mathbf{3 . 4}}\ \square\ \frac{\mathbf{3\ .\ 3}}{\mathbf{4\ .\ 3}}$$

$$\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{12}} < \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}}$$

Platí: $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$



Obrázok 2.14 Modelovanie porovnávania zlomkov s rôznymi čitateľmi a menovateľmi

Zaujímavou a veľmi náročnou úlohou pre žiakov je nájsť zlomok medzi dvoma zlomkami s po sebe idúcimi menovateľmi. Žiaci väčšinou nájdu jeden zlomok, no štandardnými postupmi si neuvedomia, že medzi dvoma zlomkami sa nachádza nekonečne veľa zlomkov. Preto ďalej uvádzame rôzne stratégie riešenia takejto úlohy.

Úloha 11: Nájdite zlomok, ktorý sa nachádza medzi zlomkami $\frac{1}{8}$ a $\frac{1}{7}$.

Riešenie: Budeme hľadať číslo *x*

a) Úprava na rovnaký menovateľ

$$\left(\frac{1}{8} < x < \frac{1}{7}\right) \rightarrow \left(\frac{7}{56} < x < \frac{8}{56}\right) \rightarrow \left(\frac{14}{102} < x < \frac{16}{102}\right);\ \text{teda}\ x = \frac{15}{102}$$

b) Úprava na rovnaký čitateľ

$$\left(\frac{1}{8} < x < \frac{1}{7}\right) \rightarrow \left(\frac{2}{16} < x < \frac{2}{14}\right);\ \text{teda}\quad x = \frac{2}{15}$$

c) Prevod zlomku na desatinné číslo

$$\frac{1}{8} \doteq 0{,}125\ ;\ \ \frac{1}{6} \doteq 0{,}142\ \ ;\ \ 0{,}12 < x < 0{,}14\,,\quad x = 0{,}13 = \frac{13}{100}$$

d) Úprava na zložený zlomok

$\frac{1}{8} < \frac{1}{7} = \frac{\frac{8}{7}}{8} = \frac{1\frac{1}{7}}{8}$ porovnávame teda zlomky s rovnakým menovateľom,

hľadáme číslo x , pre ktoré platí: $1 < x < 1\frac{1}{7} \quad \Rightarrow$

$$x = 1\frac{1}{8}; 1\frac{1}{9}; 1\frac{1}{10}; 1\frac{1}{11} \ldots,$$

z toho vyplýva, že existuje nekonečne veľa čísel, ktoré môžu byť v čitateli hľadaného zlomku, čím dostávame riešenia napríklad: $\frac{9}{64}; \frac{10}{72}; \frac{11}{80}; \frac{12}{88}; \ldots$

2.2.3 Počtové operácie so zlomkami

V tejto časti ukážeme možnosti využitia pomôcok v modelovaní počtových operácií so zlomkami a práci so zmiešaným číslom. Cieľom je, aby žiaci využívaním jednotlivých diskrétnych a spojitých modelov zlomkov (úsečka, kruh, obdĺžnik) a už známych pravidiel dokázali odvodiť pravidlá pre sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie zlomkov.

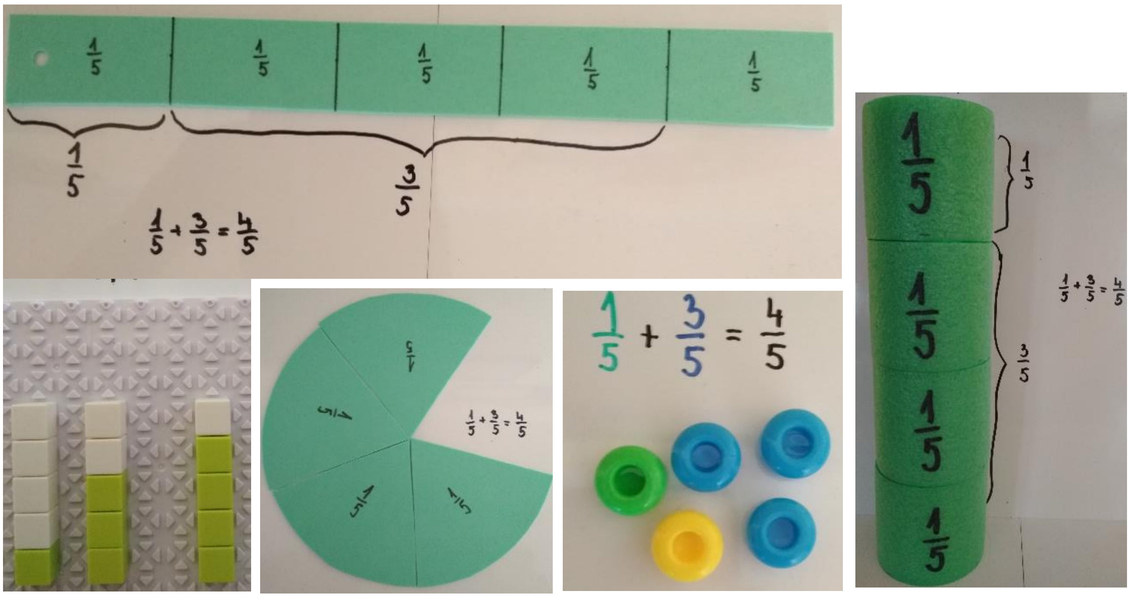
Súčet zlomkov

Pri sčítaní dvoch zlomkov platí pravidlo: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b\,d}$ (b ≠ 0, d ≠ 0).

Začíname sčítaním zlomkov s rovnakým menovateľom, nakoľko oba zlomky vyjadrujú celky rozdelené na rovnaký počet častí. Vedieme žiakov k tomu, aby použitím modelov sami dokázali vysloviť pravidlo pre sčítanie. Pri modelovaní sčítania zlomkov s rôznymi menovateľmi môžeme použiť pomôcky, ako napr. zlomková stena, kruhová zlomkovnica a penové valce. Prácou s týmito modelmi budeme hľadať možnosti, ako a čím dané modely zlomkov nahradiť tak, aby reprezentovali zlomky s rovnakými menovateľmi, a tak sme mohli sčítať rovnaké časti celku. Určovanie spoločného menovateľa je prepojené s hľadaním ekvivalentných zlomkov. Pri riešení úloh kladieme zároveň dôraz na úpravu výsledného zlomku na základný tvar.

Úloha 12: Sčítajte zlomky (s rovnakými menovateľmi) $\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$

$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{1+3}{5} = \frac{4}{5}$

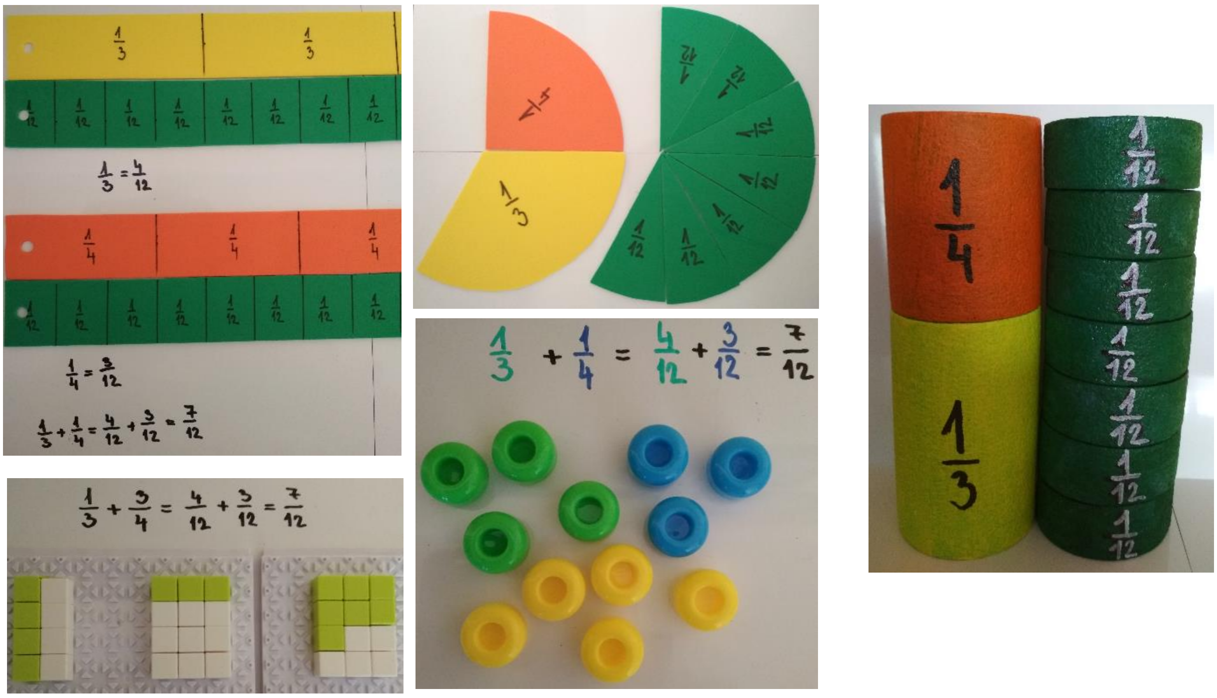


Obrázok 2.15 Modelovanie sčítania dvoch zlomkov s rovnakými menovateľmi

Úloha 13: Sčítajte zlomky (s rôznymi menovateľmi) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Riešenie:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1\,.\,4}{3\,.\,4} + \frac{1\,.\,3}{4\,.\,3} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}$$



Obrázok 2.16 Modelovanie sčítania dvoch zlomkov s rôznymi menovateľmi

Rozdiel zlomkov

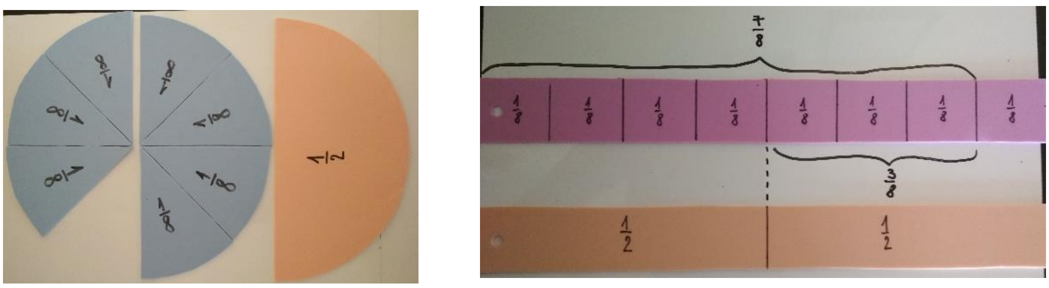
Pri odčítaní dvoch zlomkov používame pravidlo $\frac{a}{b}$ - $\frac{c}{d}$ = $\frac{ad-bc}{bd}$ $(b \neq 0, d \neq 0;\ a.d > b.c)$.

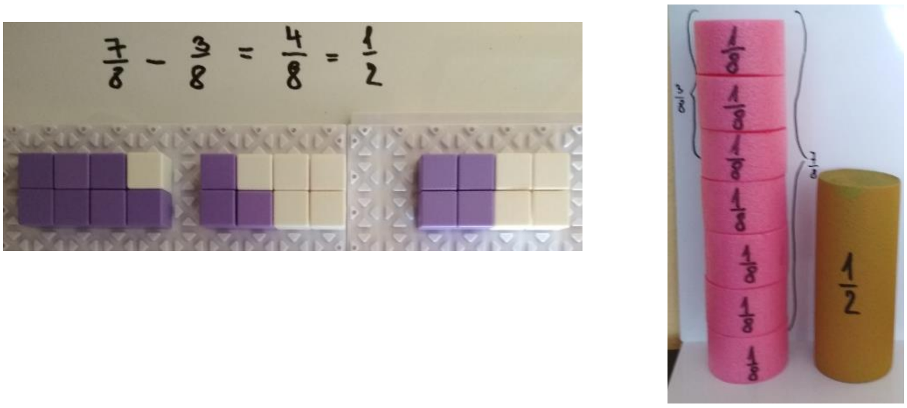
Odčítanie zlomkov je analogické so sčítaním zlomkov.

Úloha 14: Odčítajte zlomky (s rovnakými menovateľmi) $\frac{7}{8}$ - $\frac{3}{8}$

Riešenie:

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$



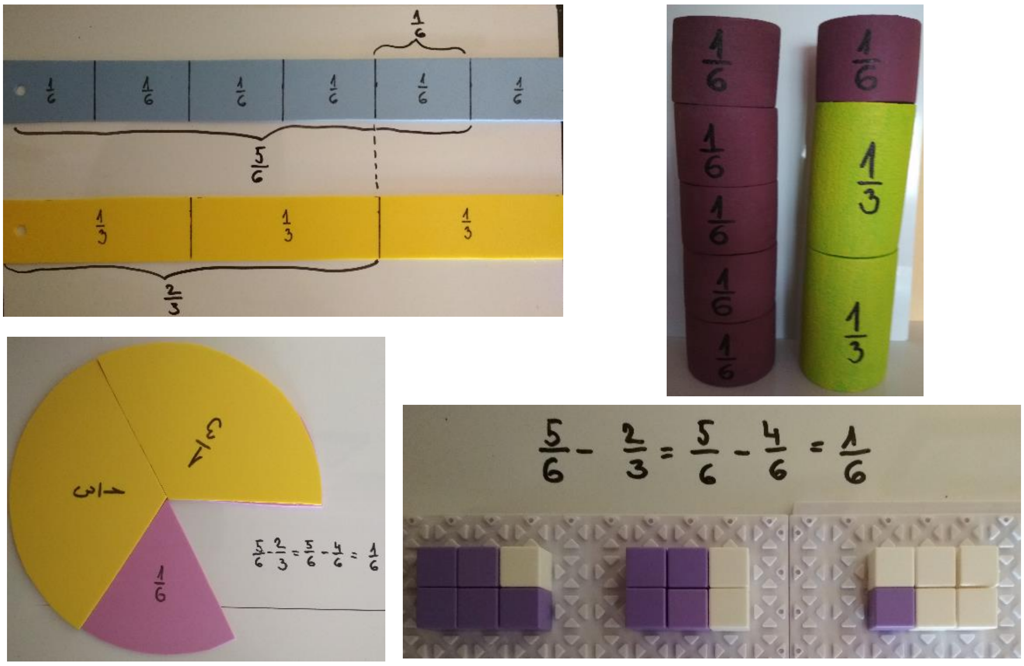


Obrázok 2.17 Modelovanie odčítania dvoch zlomkov s rovnakými menovateľmi

Úloha 15: Odčítajte zlomky(s rôznymi menovateľmi) $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

Riešenie:

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5\,.\,1}{6\,.\,1} + \frac{2\,.\,2}{3\,.\,2} = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6}$$



Obrázok 2.18 Modelovanie odčítania dvoch zlomkov s rôznymi menovateľmi

Súčin zlomkov

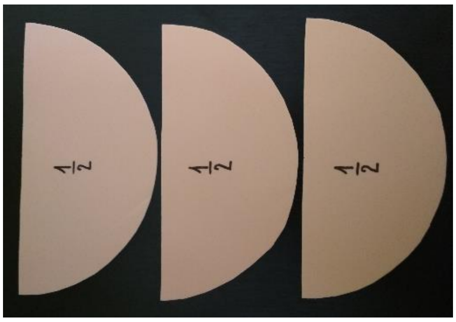
Pri násobení dvoch zlomkov platí pravidlo $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (b ≠ 0, d ≠ 0). Zlomky násobíme tak, že vynásobíme čitateľa s čitateľom a menovateľa s menovateľom. Pri násobení môžeme jednotlivé zlomky krátiť (ak nie sú v základnom tvare), ale môžeme ich krátiť aj medzi sebou navzájom.

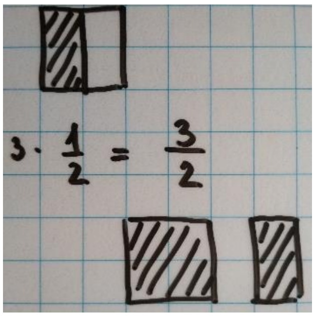
Začíname násobiť prirodzené číslo a zlomok ako súčet rovnakých sčítancov, teda ako súčet zlomkov.

Úloha 16: Vypočítajte súčin čísel $3 \cdot \frac{1}{2}$

Riešenie:

$$3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3\,.\,1}{2} = \frac{3}{2}$$





Obrázok 2.19 Modelovanie násobenia zlomku a prirodzeného čísla

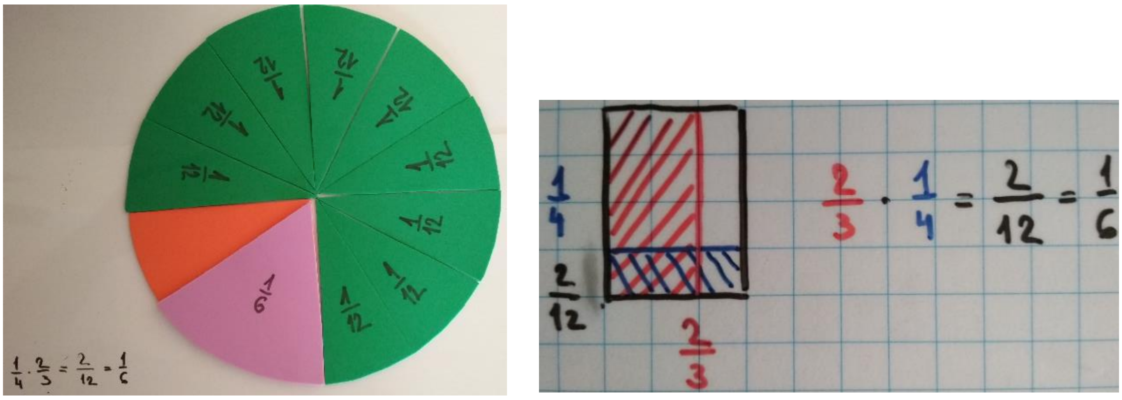
Pri násobení dvoch zlomkov je vhodné používať model obdĺžnika (mozaika a štvorčekový papier). Počítaním obsahu obdĺžnika, ktorého dĺžky strán sú vyjadrené zlomkami, by mali byť žiaci schopní odvodiť princíp násobenia dvoch zlomkov, ako aj výsledok násobenia. Pri ostatných modeloch (kruh a úsečka) je modelovanie násobenia zlomkov menej názorné.

Úloha 17: Vypočítajte súčin zlomkov $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

Riešenie:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Pri modelovaní násobenia s kruhovou zlomkovnicou (Obrázok 2.20) si $\frac{1}{4}$ kruhovej zlomkovnice rozdelíme na tri časti (tretiny). Delením štvrtiny na tretiny vzhľadom k danému celku sme vytvorili dvanástiny. Ďalej vyjadríme dve časti z týchto dvanástin, čo vieme pekne ukázať že je vlastne $\frac{1}{6}$. Násobenie zlomkov je tak vyjadrovanie „časti z danej časti celku“



Obrázok 2.20 Riešenie úlohy (násobenie dvoch zlomkov)

Podiel zlomkov

Pri delení zlomkov platí pravidlo $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (b ≠ 0, c ≠ 0, d ≠ 0). Zlomok delíme tak, že ho násobíme prevráteným zlomkom. Prevrátený zlomok k zlomku $\frac{a}{b}$ (a, b ≠ 0) je zlomok $\frac{b}{a}$.

Venujeme sa deleniu zlomku prirodzeným číslom a deleniu prirodzeného čísla zlomkom, neskôr pokračujeme delením dvoch zlomkov. Najskôr sme počítali motivačné úlohy, v ktorých sme odvodili postup pri delení a pojem prevrátený zlomok.

Úloha 18: Vydeľte zlomok prirodzeným číslom $\frac{3}{4} : 2$

Riešenie:

$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Pri modelovaní s kruhovou zlomkovnicou vychádzame z delenia troch štvrtín na dve rovnaké časti, teda na polovice. Na obrázku 2.21 je postupne rozdelená na polovicu jedna štvrtina z troch, čím vznikne jedna osmina celku. Výsledkom sú tri osminy, nakoľko sme rozdeľovali tri štvrtiny.

Obrázok 2.21 Modelovanie delenia zlomku prirodzeným číslom

Úloha 19: Vydeľte prirodzené číslo zlomkom $2 : \frac{1}{4}$

Riešenie:

$2 : \frac{1}{4} = 2 . \frac{4}{1} = 8$

Pri modelovaní rozdeľovaný celok predstavujú dva celé kruhy. Pýtame sa, koľko štvrtín sa zmestí do celku (riešime inverznú úlohu: koľko krát $\frac{1}{4}$ je 2). Zistíme, že v dvoch celých sa nachádza osem štvrtín. Výsledok je teda 8.

Obrázok 2.22 Modelovanie delenia prirodzeného čísla zlomkom

2.2.4 Zmiešané čísla

Zmiešané číslo vyjadruje zápis nepravého zlomku. Pravý zlomok je zlomok, v ktorom je čitateľ menší ako menovateľ. $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 ; \frac{a}{b}, a < b$.

Nepravý zlomok je zlomok, v ktorom čitateľ je väčší ako menovateľ. Zmiešané číslo sa skladá z celého čísla a zlomku, ktorý je menší ako 1, napríklad: $2\frac{1}{3}$.

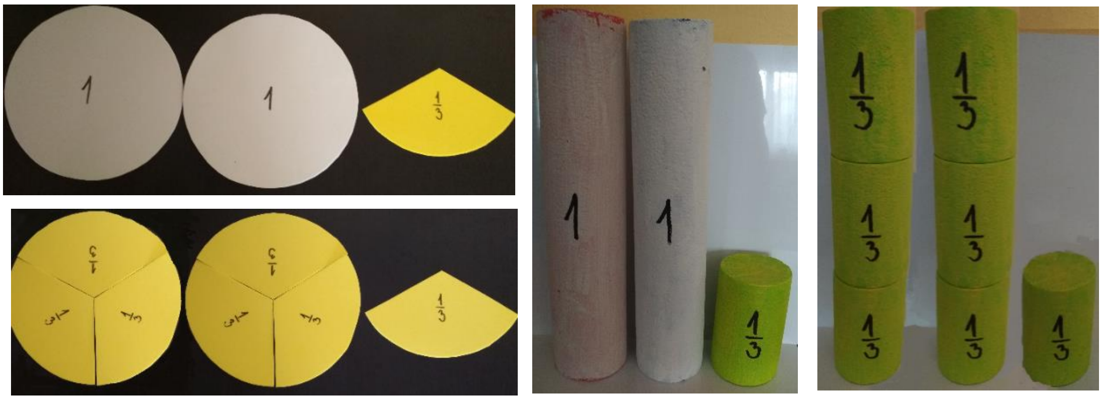
Pri zmiešaných číslach je potrebné sa zamerať na správny zápis a čítanie zmiešaných čísel a matematické operácie so zmiešanými číslami. Keďže zmiešané číslo je skrátený zápis súčtu celého čísla a zlomku, ktorý je menší ako 1, platí, že zmiešané číslo môžeme previesť na nepravý zlomok a naopak, nepravý zlomok môžeme previesť na zmiešané číslo.

Úloha 20: Upravte zmiešané číslo $2\frac{1}{3}$ na zlomok.

Riešenie:

$2\frac{1}{3} = \frac{2\ .\ 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Pri modelovaní môžeme využiť všetky dostupné modely a pomôcky, pretože ide o rozkladanie celku na časti určené menovateľom zlomku v zmiešanom čísle.

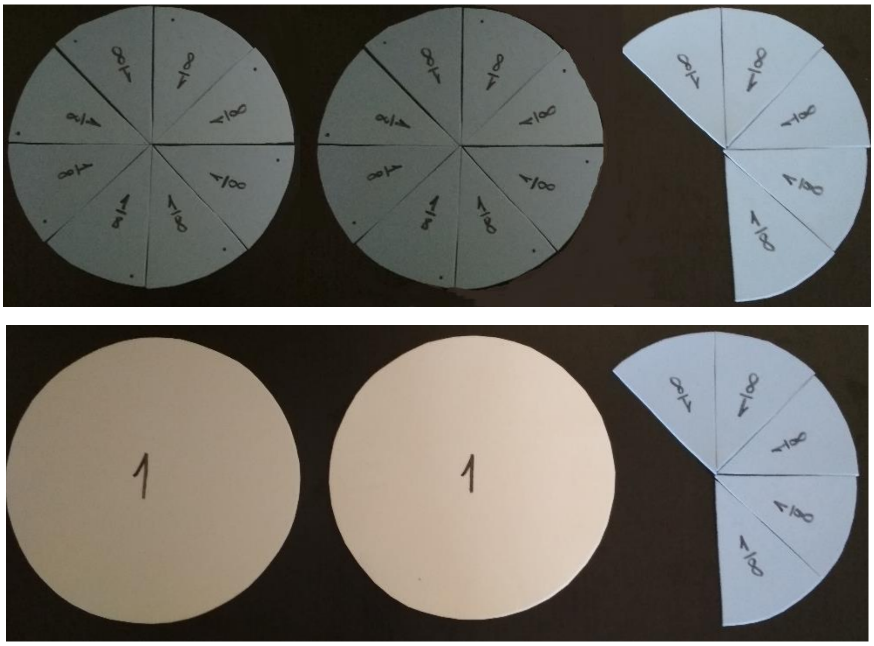


Obrázok 2.23 Modelovanie prevodu zmiešaného čísla na nepravý zlomok

Úloha 21: Upravte nepravý zlomok $\frac{21}{8}$ na zmiešané číslo.

Riešenie:

$\frac{21}{8} = \frac{16}{8} + \frac{5}{8} = 2 + \frac{5}{8} = 2\,\frac{5}{8}$



Obrázok 2.24 Modelovanie prevodu nepravého zlomku na zmiešané číslo

Reflexia na realizáciu modelovania zlomkov v školskej praxi

Pri opakovanom modelovaní žiaci pochopili súvislosti medzi jednotlivými modelmi a odhalili pozitíva aj negatíva ich použitia pri riešení úloh, pretože nie všetky modely bolo vhodné použiť pri všetkých úlohách.

Našou snahou bolo, aby proces získavania poznatkov, vedomostí a zručností žiakov v oblasti zlomkov prešiel všetkými etapami poznávacieho procesu. Žiaci si na základe motivačných úloh, zvolených prevažne z praktického života, uvedomili, že slovné vyjadrenie zlomkov (polovica, tretina a pod.) poznajú z bežného života. Vo fáze izolovaných modelov sme žiakom predložili nielen obrázkové modely, ale dali sme im možnosť deliť predmety rôznych geometrických tvarov na rôzny počet rovnakých častí. Poznanie, že jednotlivé modely majú spoločné vlastnosti, ktoré je možné aplikovať na akýkoľvek model zlomku, viedlo k zovšeobecneniu – prvému abstrakčnému zdvihu a k tvorbe univerzálneho modelu. Štandardným modelom zlomku je kruh (koláč), na ktorom sa žiaci učia deliť celok na časti, označovať časti celku a podobne. Tento model však nie je vhodné využívať pre všetky zlomky, preto sme žiakom predstavili rôzne geometrické modely.

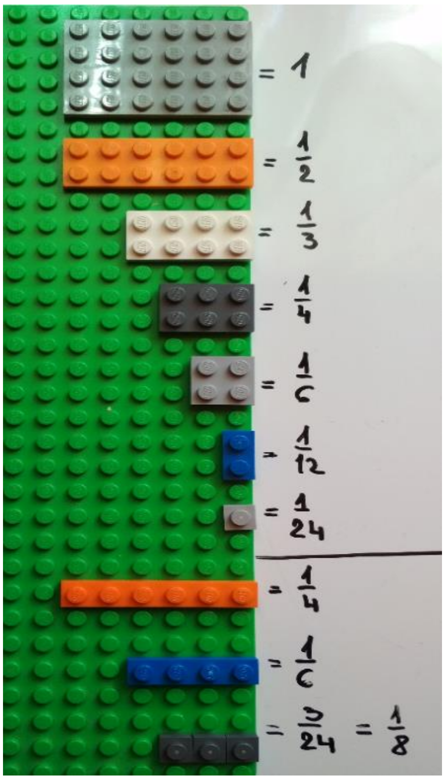
Žiaci tak získali novú skúsenosť, čo im prinieslo abstraktný poznatok, že deliť na rovnaké časti je možné rôzne geometrické útvary. Podľa počtu častí, na ktorý celok rozdelili, zlomok (teda časť z celku) pomenovali, a neskôr aj vyjadrili zápisom čísla v tvare zlomku, teda matematickým symbolom. V tejto fáze sa žiaci dokázali zbaviť závislosti od sveta materiálnych objektov a dokázali vzťah medzi časťou celku a celkom vyjadriť symbolicky. Na fázu kryštalizácie a automatizáciu získaného poznatku nám slúžili pracovné listy.

3 LEGO AKO UČEBNÁ POMÔCKA

Lego je stavebnica, ktorá podporuje tvorivosť a inšpiruje k riešeniu problémov, rozvíja fantáziu a predstavivosť. Tvoria ju umelohmotné podkladové dosky, jednoradové, dvojradové dielce, platničky, kolieska, postavičky. Podstata manipulácie so stavebnicou Lego spočíva v spájaní dielcov v snahe vytvoriť objekt pomocou predlohy, alebo podľa vlastnej fantázie. Využitie stavebnice je mnohostranné, preto by sme chceli ukázať ako je možné používať Lego vo vyučovaní matematiky, konkrétne v téme zlomky. Pomocou Lega je možné modelovať zlomky, porovnávať zlomky, rozširovať a krátiť, sčítať, odčítať a násobiť zlomky celým číslom. Ďalej budeme dielce stavebnice lega nazývať Lego-kocky.

Lego-kocky nám ponúkajú veľkú variabilitu, pretože môžeme použiť jednoradové i dvojradové dielce, ale i platničky, pomocou ktorých môžeme meniť veľkosť celkov, a teda aj rôzne deliť celok na časti. Je vhodné využiť čo najviac možností a modelovať so žiakmi rôzne veľké celky a deliť ich na rôzny počet častí. Takouto činnosťou môžu žiaci nadobudnúť a trvalo si udržať poznatok, ktorý tvorí východisko pre ďalšiu prácu so zlomkami. Pri modelovaní zlomkov môžeme využiť podkladové dosky a platničky, ale je možné použiť aj jednoradové a dvojradové dielce.

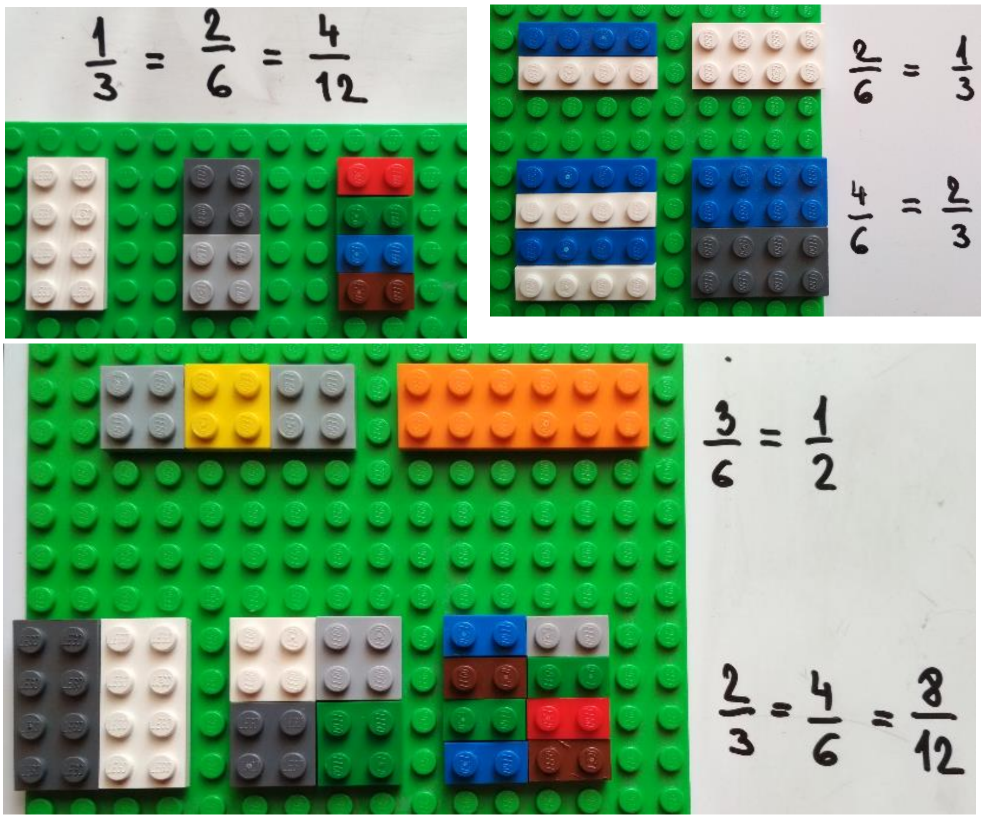
Pre inšpiráciu uvádzame nasledujúce úlohy modelované pomocou Lega. Ukážeme prácu, kde je celok reprezentovaný platničkou 6x4, ktorú postupne delíme na časti. Je dôležité vedieť vyjadriť a zapísať, akú časť celku vybrané Lego-kocky vyjadrujú.



Obrázok 3.1 Časti celku

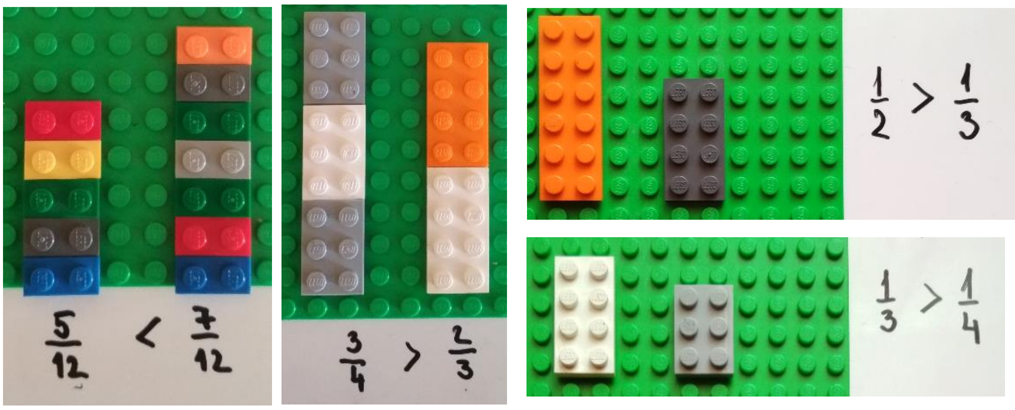
Jednotlivé časti celku sú na obrázku 3.1. Platnička 6x2 znázorňuje polovicu, platnička 4x2 vyjadruje tretinu, štvrtina celku môže byť reprezentovaná viacerými spôsobmi, a to platničkami 3x2 a 6x1. Podobne aj šestina môže byť vyjadrená platničkami 2x2 alebo 4x1. Dvanástinu celku reprezentuje platnička 2x1 a najmenšiu časť celku predstavuje platnička 1x1. Tieto platničky reprezentujú základné kmeňové zlomky, s ktorými môžeme ďalej pracovať. Je potrebné venovať dostatočné množstvo času modelovaniu celku z rovnakých častí.

Na obrázku 3.2 je znázornené modelovanie **rozširovania a krátenia zlomkov** pomocou Lega. Aj v tomto prípade nám Lego-kocky ponúkajú vysokú variabilitu a žiaci môžu vyhľadávať rôzne Lego-kocky tak, aby časti celku zostali rovnaké, ale vyjadrovali rôzne navzájom **ekvivalentné zlomky**. Na obrázku 3.2 je ukázané, ako možno nahradiť Lego-kocky inými, aby veľkosť časti celku zostala zachovaná.



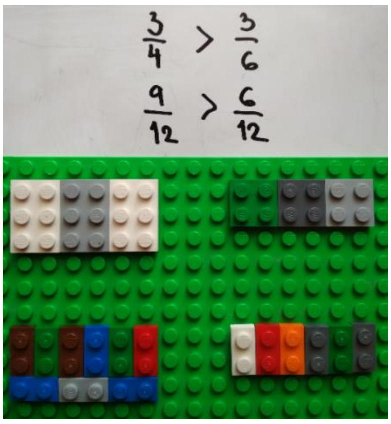
Obrázok 3.2 Lego a rozširovanie, krátenie zlomkov

Po rozširovaní a krátení zlomkov a pochopení pojmu ekvivalentné zlomky môže nasledovať modelovanie **porovnávania zlomkov**, ako vidíme na obrázku 3.3. Pomocou kmeňových zlomkov, ktoré sme vymodelovali na začiatku aktivity z Lego-kociek, môžeme zlomky porovnávať. Využijeme vizuálne porovnávanie veľkosti (výšky) vymodelovaných útvarov reprezentujúcich rôzne zlomky. Najskôr porovnávame zlomky s rovnakým menovateľom (rovnaké Lego-kocky) a neskôr zlomky s rôznym menovateľom.



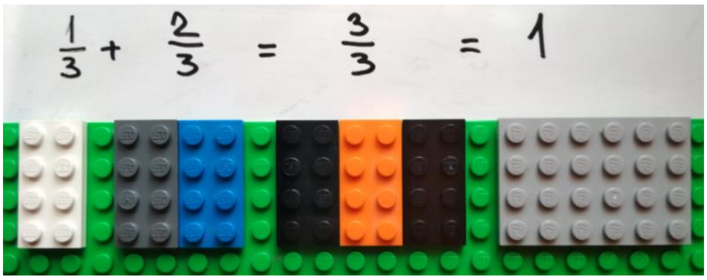
Obrázok 3.3 Lego a porovnávanie zlomkov

Porovnávanie zlomkov s rôznym menovateľom môžeme realizovať rôznymi spôsobmi. Jedným z nich je úprava na rovnakého menovateľa, ktorú môžeme názorne modelovať práve pomocou Lega nahradením jednotlivých Lego-kociek. Snažíme sa modelovať obidva porovnávané zlomky využitím rovnakých častí, teda Lego-kociek reprezentujúcich rovnaký kmeňový zlomok.

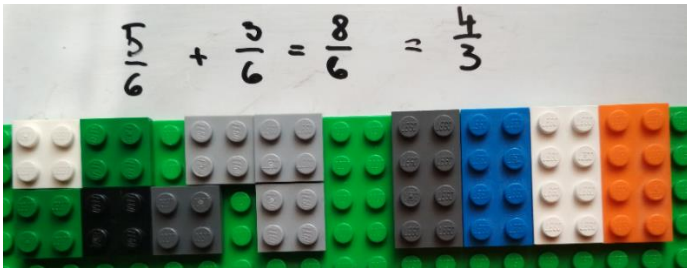


Obrázok 3.4 Lego a porovnávanie zlomkov úpravou na spoločného menovateľa

Pri **sčítaní (odčítaní) zlomkov** s rovnakým menovateľom postupujeme tak, že sčítame (odčítame) počet Lego-kociek a zapíšeme zlomkom. Ako uvádzame na obrázku 3.5, pracovali sme s modelom tretiny, pričom počet Lego-kociek vyjadruje číslo v čitateli (počet častí celku) a konkrétna Lego-kocka vyjadruje veľkosť častí celku, ktoré sčítavame. Analogicky na Obrázku 3.6 uvádzame modelovanie sčítanie šestín a zároveň úpravu na základný zlomok. Porovnaním výsledného útvaru s platničkou reprezentujúcou jednu celú by sme vedeli pokračovať v úprave na zmiešané číslo.

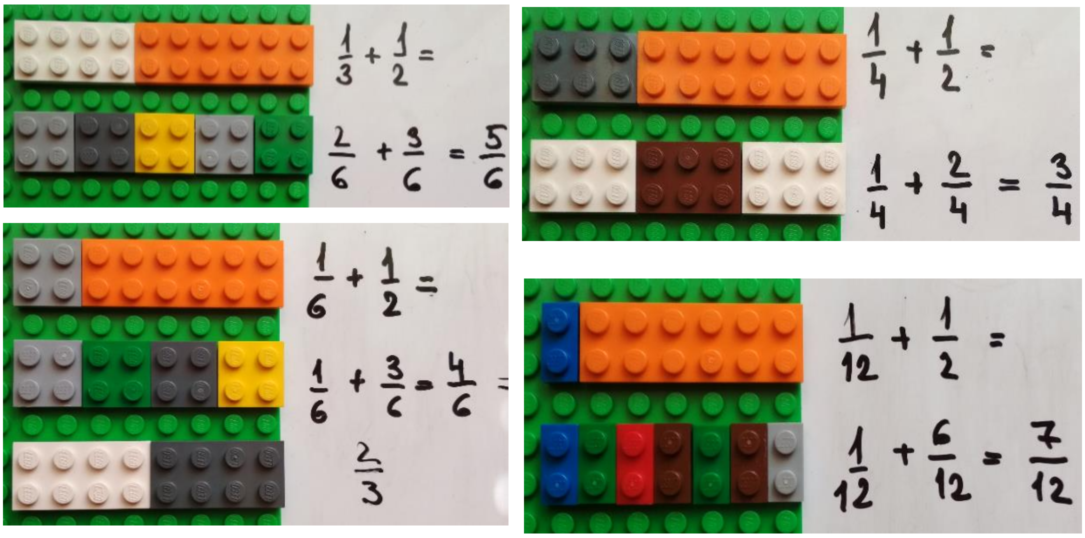


Obrázok 3.5 Lego a sčítanie zlomkov s rovnakými menovateľmi

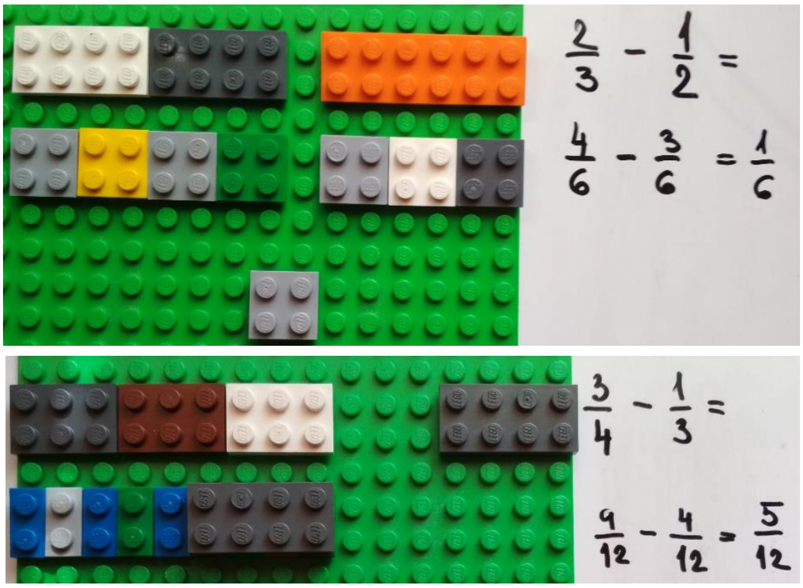


Obrázok 3.6 Lego a sčítanie zlomkov s rovnakými menovateľmi

Pri sčítaní (odčítaní) zlomkov s rôznym menovateľom postupujeme tak, že pôvodné Lego-kocky nahradíme inými tak, aby oba sčítavané zlomky boli zložené z rovnakých častí, teda Lego-kociek vyjadrujúcich rovnaký kmeňový zlomok. Touto činnosťou modelujeme úpravu zlomkov na rovnakého menovateľa. Sčítaním počtu rovnakých častí dostávame výsledný zlomok, v ktorom počet častí zapíšeme do čitateľa zlomku. Menovateľ zlomku vyjadríme podľa toho, akú časť celku vyjadrujú základné Lego-kocky, ktorými sme pôvodné Lego-kocky nahradili.

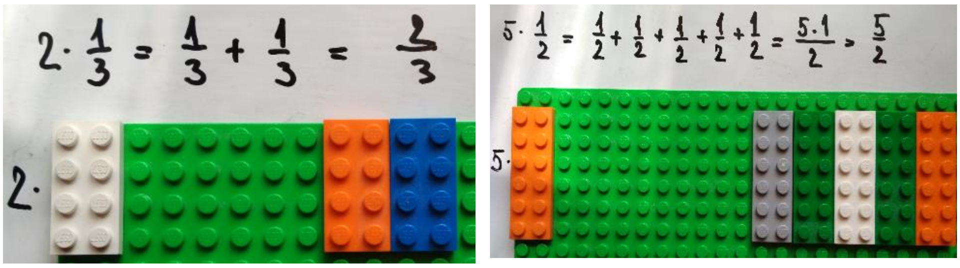


Obrázok 3.7 Lego a sčítanie zlomkov s rôznymi menovateľmi



Obrázok 3.8 Lego a odčítanie zlomkov s rôznymi menovateľmi

Násobenie zlomkov celým číslom upravíme na sčítanie počtu rovnakých častí, teda Lego-kociek reprezentujúcich rovnaký kmeňový zlomok.



Obrázok 3.9 Lego a násobenie zlomkov celým číslom

Ak zameníme Lego-kocku, ktorá reprezentuje celok, môžeme ju deliť na iné časti, čím získame opäť veľa možností ako vyjadrovať zlomky, časti celku a dané celky.

Prínos stavebnice LEGA, ako učebnej pomôcky, vidíme nielen v tom, že je to vhodná trojrozmerná učebná pomôcka podporujúca názornosť pri modelovaní zlomkov, ale hlavne v tom, že prácu so stavebnicou žiaci poznajú. Učenie tak vnímajú ako hru, sú spontánnejší, ochotnejší spolupracovať a nenásilne získavať poznatky. Takto môžeme na vyučovacej hodine vytvárať vhodnú uvoľnenú atmosféru, čo má priaznivý vplyv na budovanie pozitívneho vzťahu k matematike a vzájomnej dôvery medzi žiakom a učiteľom.

4 PRACOVNÉ LISTY K UČIVU O ZLOMKOCH

Pracovné listy sú vhodným názorným učebným materiálom, pretože ich využívanie zefektívňuje výchovno-vzdelávací proces, motivuje, aktivizuje, vedie k rozvoju samostatnosti a sústredenosti žiakov. Výhodou pracovných listov je rýchla spätná väzba poskytujúca informáciu učiteľovi, ale aj žiakovi, o úrovni osvojenia si poznatkov, vedomostí a zručností. Samostatným riešením úloh žiaci nadobúdajú nové skúsenosti.

Súbor deviatich pracovných listov k učivu o zlomkoch, uvedených v tejto publikácii, je venovaný témam: Zlomok ako časť celku, Číselná os, Rozširovanie a krátenie zlomkov, Porovnávanie zlomkov, Sčítanie a odčítanie zlomkov, Násobenie a delenie zlomkov, Zmiešané čísla, Slovné úlohy so zlomkami a Niečo navyše.

Pracovné listy sú určené ako učebná pomôcka spolu s modelmi zlomkov pre samostatnú prácu žiakov, ale i pre prácu v skupinách. Sú spracované v súlade s ŠVP, akceptujú výchovno-vzdelávacie ciele, úlohy v nich majú gradujúci charakter a logicky na seba nadväzujú. Pracovné listy obsahujú veľa obrázkov, aby žiakov motivovali a aktivizovali. Sú vytvorené tak, aby žiakom názorne priblížili nové pojmy a zjednodušili získavanie nových vedomostí. Každý pracovný list má približne štyri strany, teda je možné ho používať priebežne počas viacerých vyučovacích hodín alebo čerpať z nich zadania na domácu úlohu. Pracovné listy je vhodné používať v nadväznosti na prácu s učebnými pomôckami vytvorenými na modelovanie zlomkov. Pre pochopenie a správnu prácu s modelmi je vhodné spolu so žiakmi riešiť vzorové úlohy. Ukážky použitia modelov v jednotlivých témach sú uvedené v podkapitole 2.2.

V pracovnom liste č. 1 – zlomok ako časť celku sú úlohy na rozdeľovanie spojitých modelov (geometrických útvarov) alebo diskrétnych modelov (kardinálne i ordinálne usporiadaných) na rovnaké časti. Úlohy na zafarbovanie určitého počtu častí z celku striedajú úlohy, v ktorých je potrebné určiť zafarbenú časť celku. Ďalší typ úloh je zameraný na určenie počtu všetkých častí celku (celok), ak žiaci poznajú iba časť celku. Žiaci ešte nepoužívajú symbolický zápis zlomku, preto sú zlomky a časti celku uvádzané slovne.

V pracovnom liste č. 2 – zlomky na číselnej osi sú úlohy na rozdeľovanie obdĺžnika a úsečky na rôzne časti. V úlohách je potrebné správne zapísať zlomky, ktoré sa nachádzajú na určených miestach na číselnej osi, a tiež znázorniť na číselnej osi zlomky menšie alebo väčšie ako jedna.

V pracovnom liste č. 3 – rozširovanie a krátenie zlomkov sú úlohy na určenie zlomkov v základnom tvare, na rozširovanie a krátenie zlomkov a ich znázornenie na spojitom geometrickom modeli, s cieľom uvedomiť si ekvivalenciu zlomkov. Ďalšie úlohy sú zamerané na určenie čísla, ktorým bol zlomok rozšírený, na označenie čísel, ktoré nie sú v základnom tvare a hľadanie čísel, ktorými je možné daný zlomok krátiť.

V pracovnom liste č. 4 – porovnávanie a usporadúvanie zlomkov sú úlohy na porovnávanie zlomkov s rovnakými aj rôznymi menovateľmi. Porovnávanie zlomkov je realizované cez ich znázornenie na geometrických útvaroch a na číselnej osi. Ďalšie úlohy sú zamerané na triedenie zlomkov na pravé a nepravé, usporiadanie zlomkov podľa zadania a na používanie krížového pravidla pri porovnávaní zlomkov.

V pracovnom liste č. 5 – sčítanie a odčítanie zlomkov sú úlohy, v ktorých sa využívajú na riešenie úloh na sčítanie a odčítanie zlomkov s rovnakými i rôznymi menovateľmi spojité a diskrétne modely. Na precvičovanie súčtu zlomkov sú tu využité sčítacie pyramídy alebo šípkové schémy.

V pracovnom liste č. 6 – násobenie a delenie zlomkov sú úlohy na modelovanie týchto počtových operácií využitím spojitých modelov. Úlohy sú zamerané na násobenie a delenie zlomkov prirodzeným číslom alebo zlomkom, na určenie prevráteného zlomku k danému zlomku a upravovanie zložených zlomkov.

V pracovnom liste č. 7 – zmiešané čísla sú úlohy na hľadanie nepravých zlomkov, na ich znázornenie na rôznych geometrických modeloch a úpravu na tvar zmiešaného čísla a naopak na úpravu zmiešaných čísel na nepravé zlomky. Ďalej sú tu úlohy na počtové operácie so zmiešanými číslami.

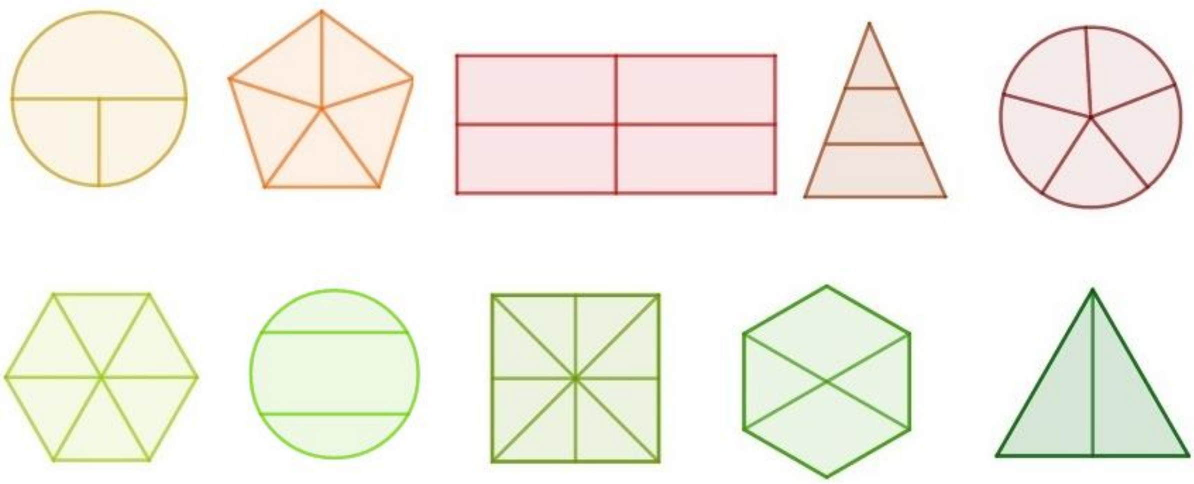
V pracovnom liste č. 8 – slovné úlohy so zlomkami sa nachádzajú rôzne slovné úlohy, pri ktorých žiaci využívajú nadobudnuté vedomosti a doterajšie skúseností z manipulovania s modelmi a z riešenia úloh zo zlomkami.

V pracovnom liste č. 9 – niečo navyše sa nachádza zmes úloh, ktorá je akýmsi zhrnutím predchádzajúcich pracovných listov.

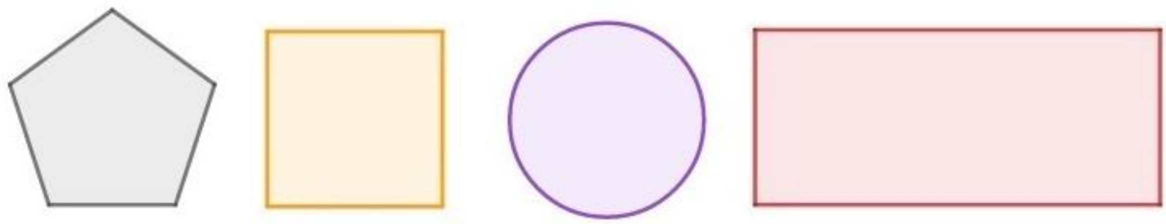
Pracovné listy zamerané na zlomky a ich modelovanie

ZLOMOK AKO ČASŤ CELKU

1. Zakrúžkuj útvary, ktoré sú rozdelené na rovnaké časti.

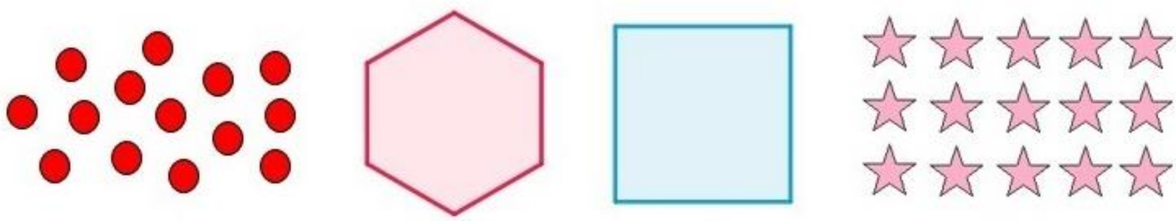


2. Rozdeľ útvary alebo množinu útvarov na:



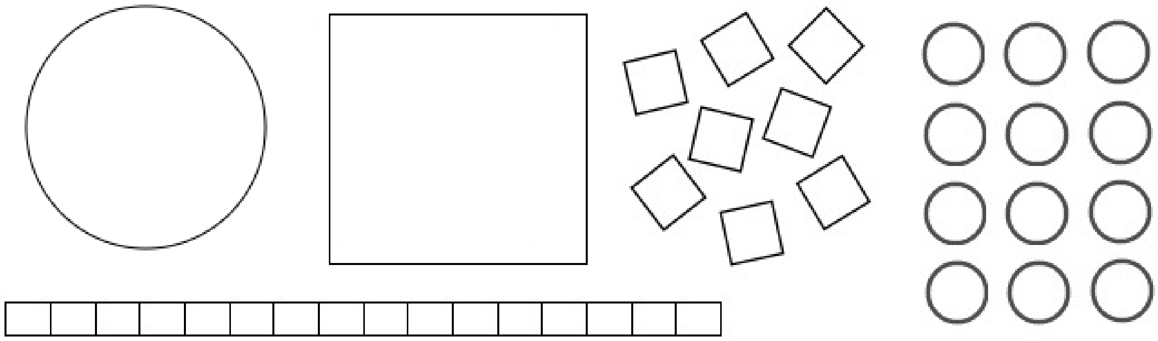
pätiny štvrtiny polovice tretiny

desatiny

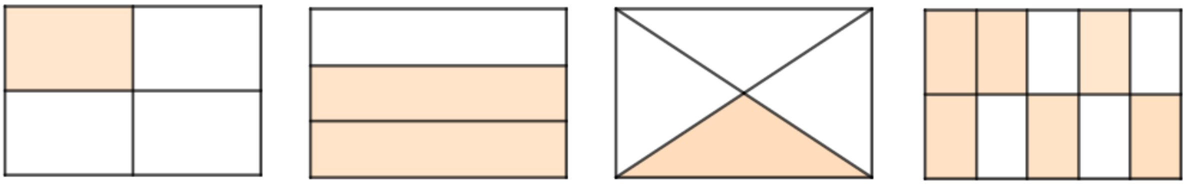


sedminy šestiny osminy pätiny

3. Zafarbi tri štvrtiny daného útvaru alebo množiny útvarov.



4. Zapíš slovne, aká časť celku je zafarbená.



....

5. Je možné, aby (rovnaký) štvorec bol jednou polovicou, jednou tretinou aj jednou štvrtinou? Ak áno, dokresli dané obrázky.

6. Nájdi celok ak vieš, že jeho:

a) tretina je 9 → celok je ....

b) desatina je 8 → celok je ....

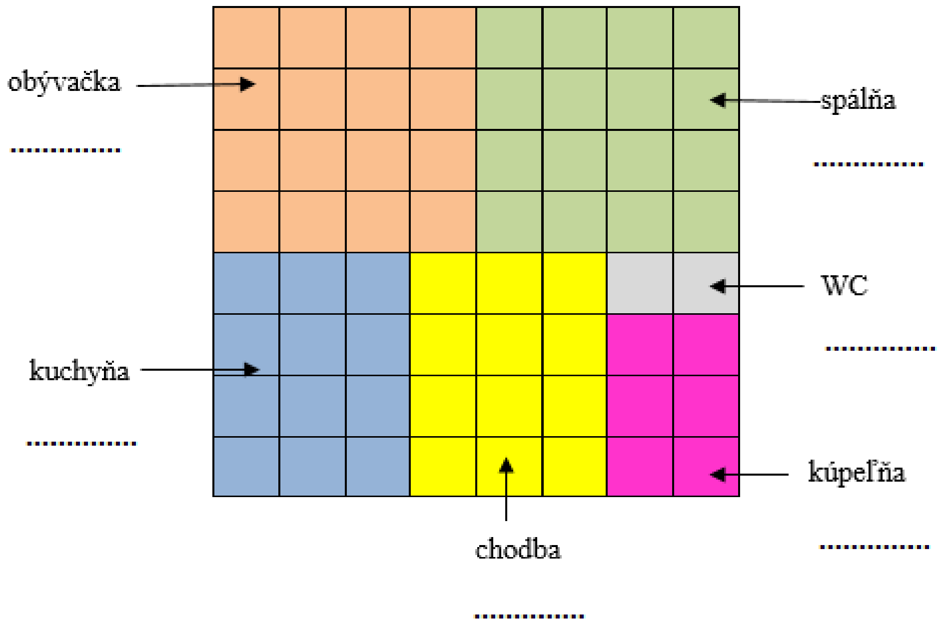
c) šestina je 15 → celok je ....

d) pätina je 14 → celok je ....

e) štvrtina je 31 → celok je ....

f) polovica je 15 → celok je ....

7. Pre obyvateľov mesta boli postavené nové byty. Pôdorys jedného bytu je znázornený na obrázku. Zapíš, akú časť bytu predstavuje každá z miestností ?



8. Vyznač na obrázkoch dané časti a doplň do viet, akú časť pizze a bonboniéry si vyznačil.

2 kúsky pizze

Celú pizzu tvorí .... kúskov.

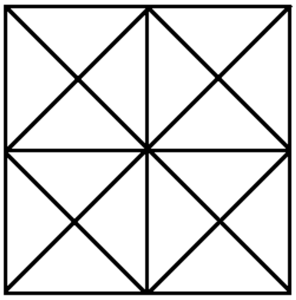
Vyznačil som .... pizze.

10 kúskov bonbónov

Celá bonboniéra obsahuje .... bonbónov.

Vyznačil som .... bonboniéry.

9. Zafarbi časť útvaru tak, aby zafarbená časť tvorila deväť šestnástin celku.



10. Spravodlivo rozdeľ tri pizze medzi Tomáša, Alenu, Beátu a Petra. (Rozdelenie vyznač do obrázku)

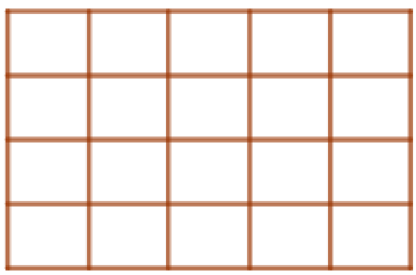
a) Ak deťom nezáleží aký druh pizze dostanú:



b) Ak každé dieťa chce ochutnať z každého druhu pizze:



11. Janka a Betka si spolu kúpili jednu čokoládu. Janka si vzala pätinu čokolády. Betka si zobrala štvrtinu zo zvyšku čokolády. Majú obe rovnako? Svoje riešenie vyznač v obrázku.

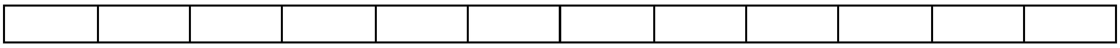


ZLOMKY NA ČÍSELNEJ OSI

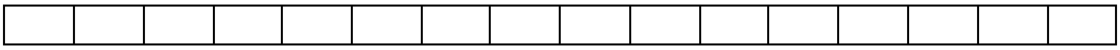
1. Zafarbi:

a) 2 pätiny

b) 10 dvanástin



c) 12 šestnástin



2. Odhadom rozdeľ číselnú os na:

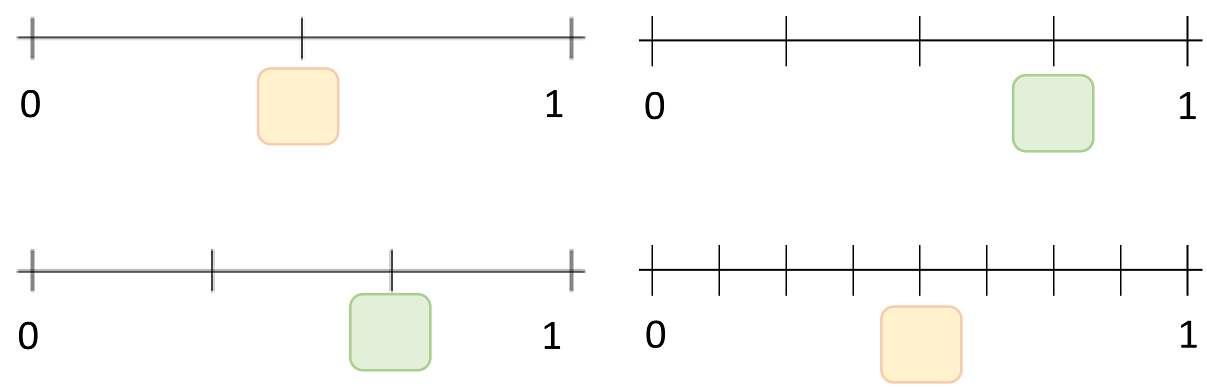
a) polovice

b) tretiny

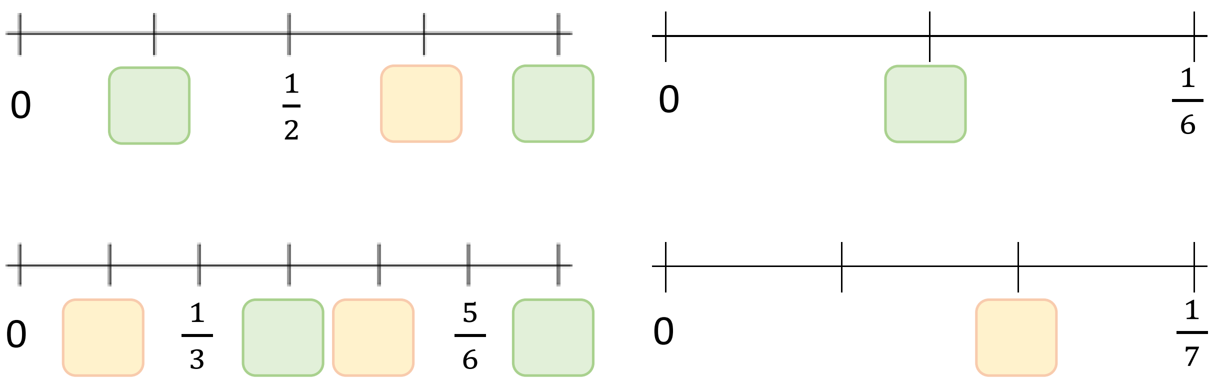
c) šestiny

d) osminy

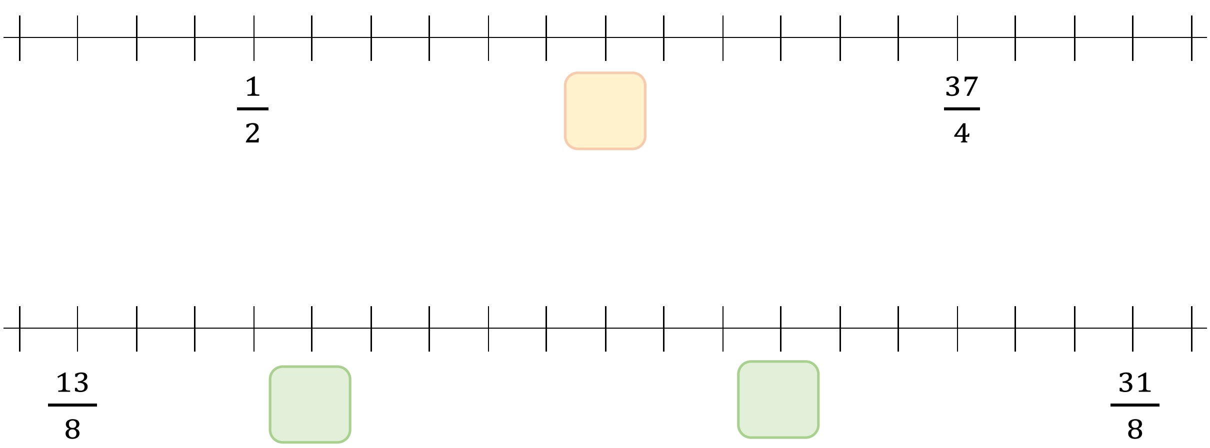
3. Na vyznačené miesta doplň chýbajúce zlomky na číselnej osi.



4. Na vyznačené miesta doplň chýbajúce zlomky na číselnej osi.

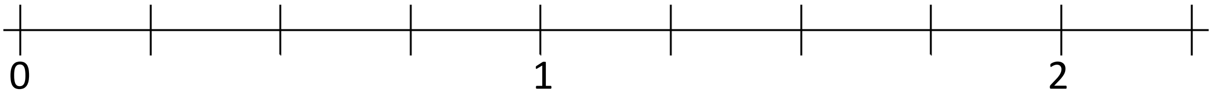


5. Na vyznačené miesta doplň chýbajúce zlomky na číselnej osi.

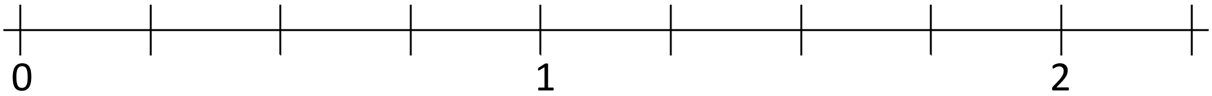


6. Znázorni na číselnej osi zlomky:

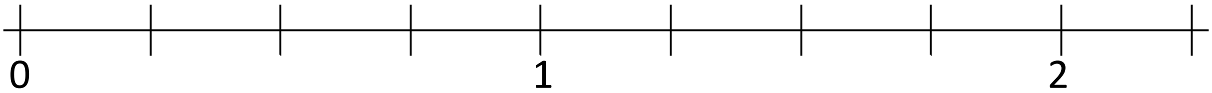
a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$



b) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$

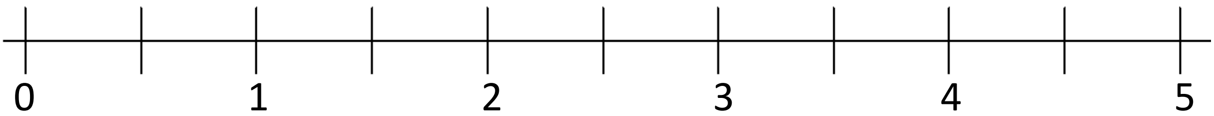


c) $\frac{5}{4}, \frac{13}{8}, \frac{3}{2}$

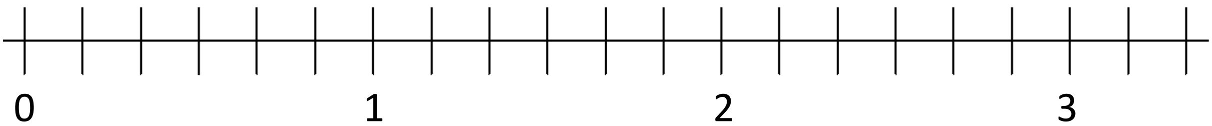


7. Znázorni na číselnej osi zlomky:

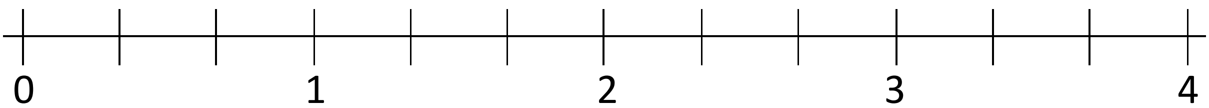
a) $\frac{9}{4}$



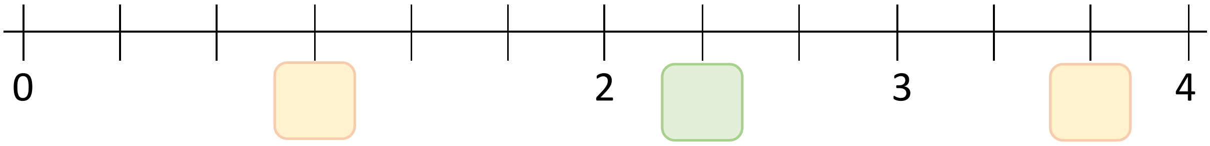
b) $\frac{27}{12}$

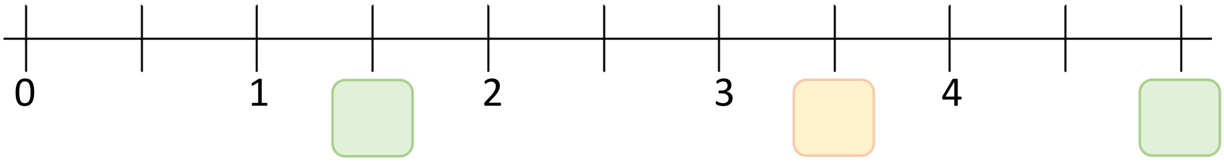


c) $\frac{13}{6}$



8. Na vyznačené miesta doplň chýbajúce zlomky na číselnej osi.





ROZŠIROVANIE A KRÁTENIE ZLOMKOV

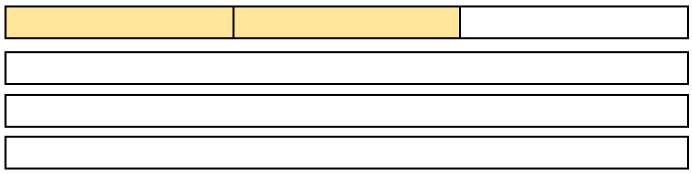
1. Zafarbi hviezdičky, v ktorých sa nachádzajú zlomky zapísané v základnom tvare.

$\frac{1}{6}$ $\frac{7}{14}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{6}{15}$ $\frac{4}{6}$

$\frac{5}{10}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{13}{16}$ $\frac{16}{32}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{7}{8}$

2. Postupne rozširuj zlomok číslom 2. Rozšírené zlomky znázorni.

$$\frac{2}{3} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$



3. Uvedené zlomky rozšír číslom 5.

$\frac{7}{9} =$ $\frac{3}{2} =$ $\frac{5}{9} =$ $\frac{3}{7} =$ $\frac{4}{5} =$

4. Uvedené zlomky vykráť číslom 3.

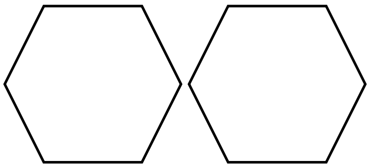
$\frac{6}{9} =$ $\frac{3}{18} =$ $\frac{9}{12} =$ $\frac{12}{24} =$ $\frac{3}{36} =$

5. Akým číslom je rozšírený daný zlomok? Doplň.

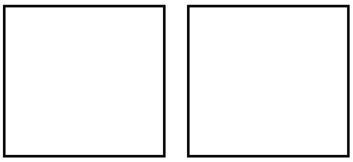
$\frac{3\cdot}{4\cdot} = \frac{12}{16}$ $\frac{7\cdot}{8\cdot} = \frac{42}{48}$ $\frac{3\ \cdot}{14\cdot} = \frac{9}{42}$ $\frac{9\cdot}{10\cdot} = \frac{72}{80}$

6. Rozšír dané zlomky uvedeným číslom a znázorni pôvodný aj rozšírený zlomok na príslušnom modeli.

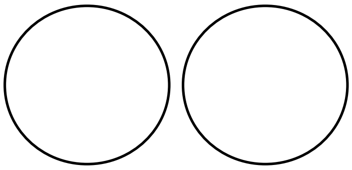
a) zlomok $\frac{5}{6}$ číslom 3



b) zlomok $\frac{1}{2}$ číslom 2



c) zlomok $\frac{1}{2}$ Číslom 4



7. Do prázdnych okienok doplň chýbajúce čísla tak, aby platili nasledovné rovnosti.

a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{\square} = \frac{\square}{12} = \frac{18}{\square} = \frac{\square}{72} = \frac{72}{\square} = \frac{\square}{288}$

b) $\frac{1}{5} = \frac{\square}{10} = \frac{6}{\square} = \frac{\square}{90} = \frac{36}{\square} = \frac{\square}{360} = \frac{108}{\square}$

8. Zakrúžkuj zlomky, ktoré <u>nie sú</u> v základnom tvare a uprav ich na základný tvar.

$\frac{27}{66}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{11}{88}$ $\frac{24}{64}$ $\frac{26}{5}$ $\frac{14}{7}$ $\frac{12}{42}$ $\frac{40}{36}$

základný tvar: $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$

9. Do prázdnych okienok doplň chýbajúce čísla tak, aby platili dané rovnosti.

$\frac{7}{10} = \frac{35}{\square}$ $\frac{\square}{12} = \frac{8}{3}$ $\frac{\square}{88} = \frac{7}{8}$ $\frac{3}{8} = \frac{72}{\square}$ $\frac{16}{64} = \frac{\square}{8}$

$\frac{\square}{42} = \frac{2}{7}$ $\frac{5}{4} = \frac{\square}{32}$ $\frac{5}{18} = \frac{20}{\square}$ $\frac{\square}{288} = \frac{1}{2}$ $\frac{3}{11} = \frac{18}{\square}$

10. Rozšír dvojice zlomkov tak, aby mali rovnaký menovateľ.

a) $\frac{2}{5}, \frac{9}{10}$ $\frac{\square}{10}, \frac{\square}{10}$

b) $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}$ $\frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{3}{4}, \frac{7}{3}$ $\frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

d) $\frac{1}{3}, \frac{5}{8}$ $\frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

e) $\frac{7}{6}, \frac{6}{4}$ $\frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

f) $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}$ $\frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

POROVNÁVANIE A USPORADÚVANIE ZLOMKOV

1. Pomocou symbolov > alebo < porovnaj dané zlomky.

$\frac{5}{4} \square \frac{3}{4}$ $\frac{2}{3} \square \frac{3}{3}$ $\frac{9}{6} \square \frac{4}{6}$ $\frac{5}{2} \square \frac{1}{2}$ $\frac{3}{9} \square \frac{8}{9}$

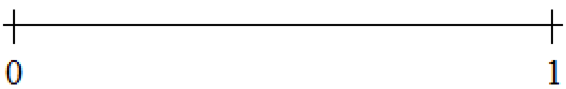
$\frac{2}{5} \square \frac{2}{3}$ $\frac{5}{3} \square \frac{5}{4}$ $\frac{7}{8} \square \frac{7}{5}$ $\frac{1}{3} \square \frac{1}{2}$ $\frac{3}{2} \square \frac{3}{5}$

2. Znázorni dané zlomky vo štvorci a potom ich porovnaj.

$\frac{1}{2} \square \frac{2}{4}$ $\frac{4}{8} \square \frac{8}{16}$

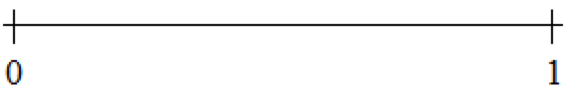
3. Znázorni dané zlomky na číselnej osi a porovnaj.

a) $\frac{3}{5} \square \frac{4}{5}$

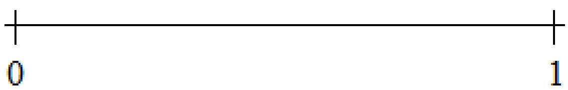


b) $\frac{1}{2} \square \frac{3}{4}$

c) $\frac{3}{4} \square \frac{4}{6}$



d) $\frac{3}{5} \square \frac{6}{10}$



4. Roztrieď zlomky.

$\frac{5}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{9}{6}$ $\frac{11}{10}$ $\frac{14}{14}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{25}{15}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{7}{21}$

a) zlomky menšie ako 1:

b) zlomky väčšie ako 1:

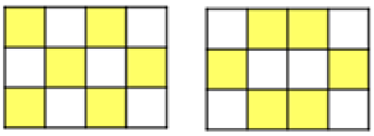
c) zlomky rovné 1:

Správne doplň chýbajúcu časť vety:

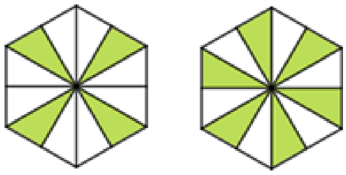
Zlomky, ktoré sú menšie ako 1 nazývame ______________________________ .

Zlomky, ktoré sú väčšie ako 1 nazývame ______________________________ .

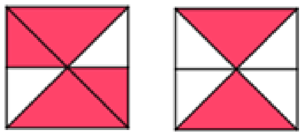
5. Vyjadri zlomkom v základnom tvare akú časť celku tvorí zafarbená časť obrázka a porovnaj tieto zlomky.



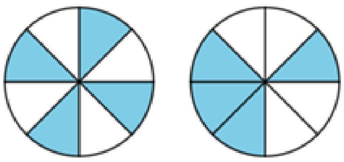
$\frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$



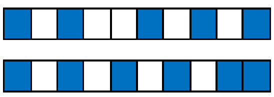
____



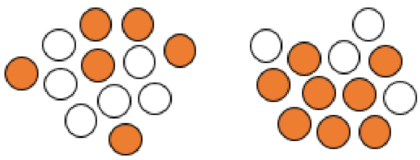
____



____



____



____

6. Usporiadaj zlomky:

a) od najmenšieho po najväčší: $\frac{0}{2}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{9}{6}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{7}{14}$ $\frac{3}{18}$ $\frac{1}{1}$

b) od najväčšieho po najmenší: $\frac{0}{2}$ $\frac{13}{30}$ $\frac{8}{5}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{16}{15}$ $\frac{18}{18}$

7. Ku každému zlomku napíš zlomok, ktorý je <u>väčší</u> tak, aby:

$\frac{6}{5}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{12}{15}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{13}{12}$

a) mal rovnaký menovateľ:

b) mal rovnaký čitateľ:

c) mal rôzny čitateľ aj menovateľ:

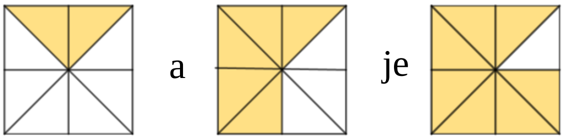
8. Porovnaj zlomky použitím krížového pravidla.

$\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{5}{6}$ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{4}{6}$ $\frac{6}{8}$ ☐ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ ☐ $\frac{5}{7}$ $\frac{3}{9}$ ☐ $\frac{1}{2}$

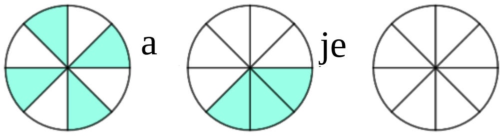
SČÍTANIE A ODČÍTANIE ZLOMKOV

1. Zapíš zafarbené časti celku zlomkami a urči ich súčet. Pri výpočte využi obrázok. Postupuj podľa ukážky.

ukážka:

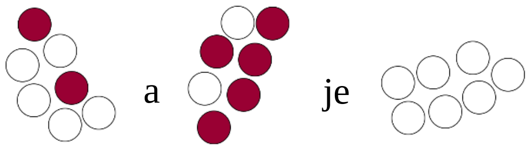


$$\frac{2}{8} + \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$$



____ + ____ = ____

____ + ____ = ____



____ + ____ = ____

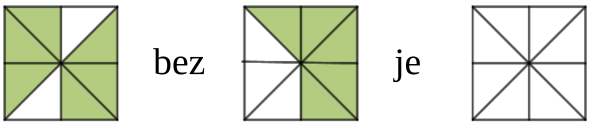
____ + ____ = ____

____ + ____ = ____

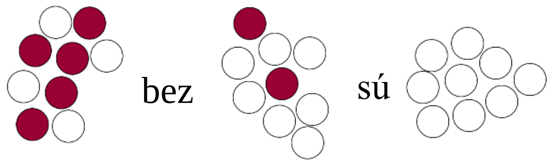
2. Zapíš zafarbené časti celku zlomkami a urči ich rozdiel. Pri výpočte využi obrázok.

_____ − _____ = _____

_____ − _____ = _____



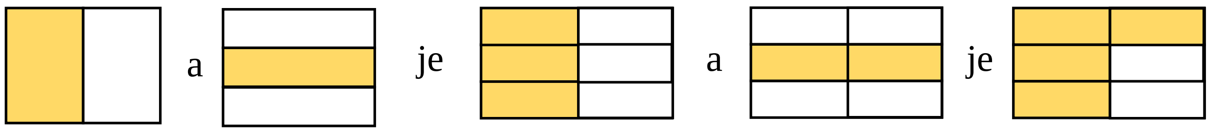
_____ − _____ = _____



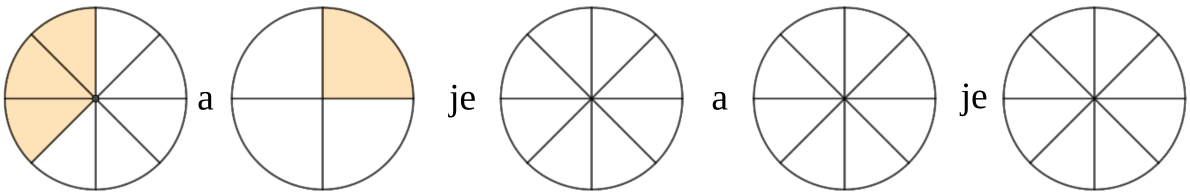
_____ − _____ = _____

3. Zapíš zlomkom akú časť celku tvorí zafarbená časť útvaru. Následne sčítaj/odčítaj tieto zlomky. Znázorni toto sčítanie/odčítanie zlomkov na príslušnom modeli. Postupuj podľa ukážky.

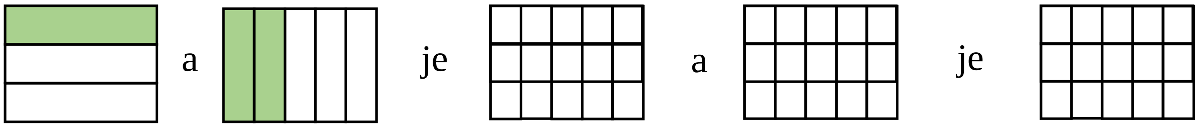
ukážka:



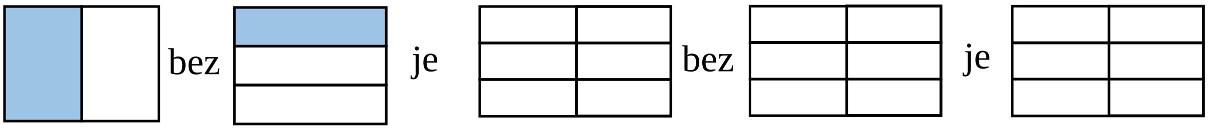
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$



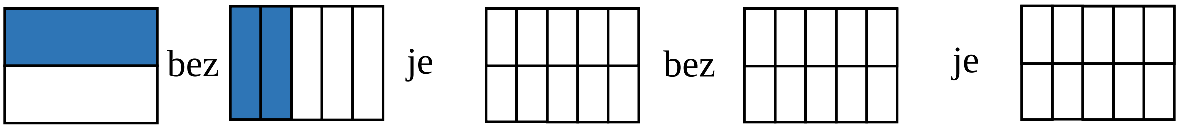
_____ + _____ = _____ + _____ = _____



____ + ____ = ____ + ____ = ____



____ − ____ = ____ − ____ = ____



____ − ____ = ____ − ____ = ____

4. Vypočítaj.

a) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} =$

b) $\frac{4}{5} + \frac{3}{4} =$

c) $\frac{5}{8} + \frac{4}{9} =$

d) $\frac{2}{4} + \frac{5}{7} =$

e) $\frac{7}{8} + \frac{3}{7} =$

f) $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} =$

g) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$

h) $\frac{5}{8} - \frac{3}{5} =$

i) $\frac{5}{6} - \frac{5}{18} =$

j) $\frac{14}{6} - \frac{8}{4} =$

5. Doplň sčítacie pyramídy zlomkami v základnom tvare.

$\frac{1}{2}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{1}{4}$

$\frac{5}{12}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{8}$

6. Vypočítaj.

a) $\frac{3}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=$

b) $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=$

c) $\frac{1}{3}+\frac{2}{15}+\frac{1}{6}=$

d) $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{20}=$

e) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{4}{6}$

f) $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{4}{6}=$

g) $\frac{7}{9}-\frac{4}{18}-\frac{1}{6}=$

h) $\frac{5}{7}-\frac{4}{21}-\frac{1}{3}=$

i) $\frac{8}{10}-\frac{4}{30}-\frac{3}{5}=$

j) $\frac{4}{6}-\frac{4}{12}-\frac{1}{5}=$

k) $\frac{7}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=$

l) $\frac{11}{15}-\frac{1}{30}-\frac{3}{5}=$

7. Doplň čísla do prázdnych okienok.

$$\frac{1}{5} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \square \xrightarrow{-\frac{4}{15}} \square \xrightarrow{-\frac{3}{10}} \square \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \square$$

$$\frac{7}{8} \xrightarrow{-\frac{1}{4}} \square \xrightarrow{-\frac{1}{2}} \square \xrightarrow{+\frac{1}{12}} \square \xrightarrow{+\frac{1}{6}} \square$$

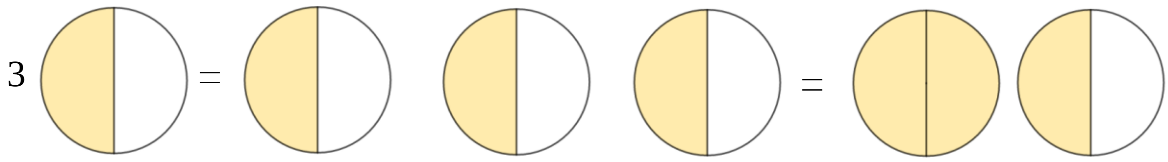
$$\frac{1}{2} \xrightarrow{+\frac{2}{3}} \square \xrightarrow{-\frac{1}{8}} \square \xrightarrow{-\frac{1}{12}} \square \xrightarrow{+\frac{3}{6}} \square$$

$$\square \xrightarrow{+\frac{1}{4}} \square \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \square \xrightarrow{-\frac{5}{6}} \square \xrightarrow{+\frac{1}{3}} \frac{7}{9}$$

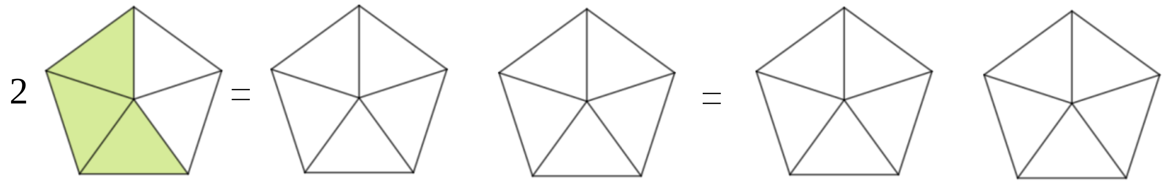
NÁSOBENIE A DELENIE ZLOMKOV

1. S využitím modelov vynásob zlomky celým číslom. Tento výpočet zapíš aj pomocou zlomkov. Postupuj podľa ukážky.

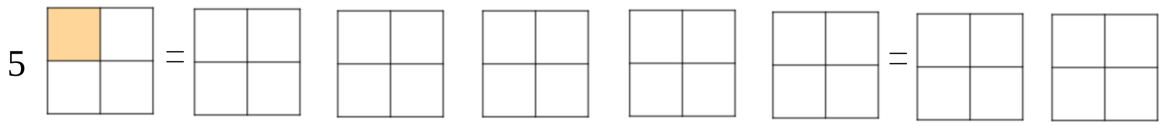
ukážka:



$$3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



$$2 \cdot \frac{3}{5} = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



$$5 \cdot \frac{1}{4} = \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

2. Vypočítaj a výsledný zlomok uprav na základný tvar.

a) $8 \cdot \frac{5}{4} =$

b) $5 \cdot \frac{3}{5} =$

c) $4 \cdot \frac{7}{8} =$

d) $10 \cdot \frac{2}{5} =$

e) $5 \cdot \frac{2}{3} =$

f) $7 \cdot \frac{4}{14} =$

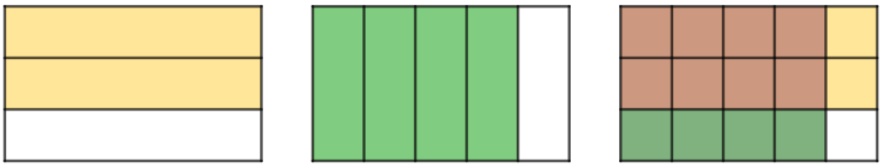
g) $5 \cdot \frac{4}{9} =$

h) $5 \cdot \frac{3}{20} =$

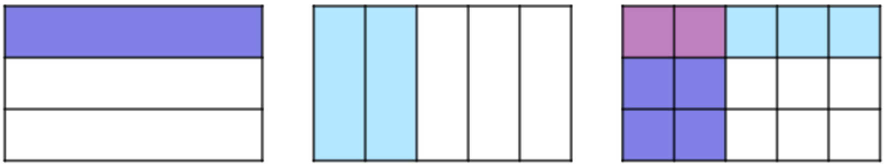
i) $3 \cdot \frac{4}{7} =$

3. Pomocou obdĺžnikového modelu znázorni násobenie daných zlomkov a zapíš výsledok. Výsledný zlomok uprav na základný tvar.

$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{15}$



$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$



$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \text{—}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \text{—}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} = \text{—}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7} = \text{—}$$

4. Vypočítaj a výsledný zlomok uprav na základný tvar.

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} =$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} =$

c) $\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7} =$

d) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} =$

e) $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{30} =$

f) $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} =$

g) $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} =$

h) $\frac{6}{5} \cdot \frac{2}{4} =$

i) $\frac{5}{8} \cdot \frac{25}{4} =$

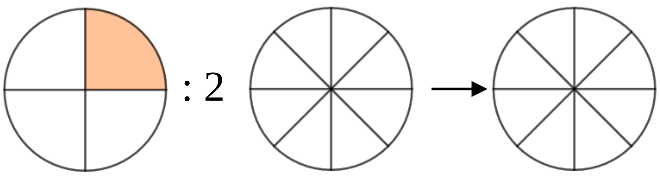
j) $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{7} =$

k) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} =$

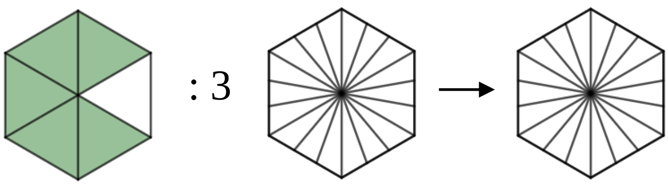
l) $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} =$

5. Znázorni delenie zlomku celým číslom prostredníctvom daných modelov a zapíš výsledok. Výsledný zlomok uprav na základný tvar.

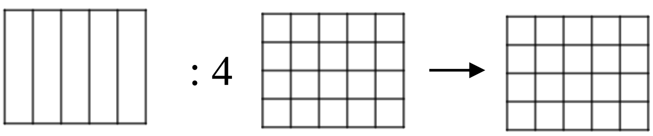
$\frac{1}{2} : 3 =$ jedna tretina z $\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$



$\frac{1}{4} : 2 =$ .... z $\frac{1}{2} = \frac{}{}$



$\frac{5}{6} : 3 =$ .... z $\frac{5}{6} = \frac{}{}$



$\frac{4}{5} : 4 =$ .... z $\frac{4}{5} = \frac{}{}$

6. Vypočítaj.

a) $\frac{3}{5} : 4 =$

b) $\frac{5}{7} : 25 =$

c) $\frac{10}{8} : 5 =$

d) $\frac{2}{7} : 5 =$

e) $\frac{1}{10} : 6 =$

f) $\frac{3}{4} : 6 =$

g) $\frac{2}{3} : 8 =$

h) $\frac{5}{7} : 9 =$

i) $\frac{5}{6} : 10 =$

7. Ku každému zlomku napíš do prázdneho okienka prevrátený zlomok.

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{6}{7}$

c) $\frac{8}{11}$

d) $\frac{4}{3}$

e) $\frac{18}{30}$

f) $\frac{5}{7}$

8. Vypočítaj a výsledný zlomok uprav na základný tvar.

a) $\frac{2}{5} : \frac{7}{9} =$

b) $\frac{1}{3} : \frac{5}{8} =$

c) $\frac{2}{15} : \frac{3}{4} =$

d) $\frac{8}{11} : \frac{4}{5} =$

e) $\frac{7}{8} : \frac{70}{4} =$

f) $\frac{17}{21} : \frac{4}{7} =$

g) $\frac{6}{10} : \frac{6}{5} =$

h) $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} =$

i) $\frac{7}{12} : \frac{14}{4} =$

j) $\frac{3}{13} : \frac{1}{8} =$

k) $\frac{4}{6} : \frac{18}{13} =$

l) $\frac{5}{3} : \frac{5}{6} =$

9. Uprav zložené zlomky na zlomky v základnom tvare.

a) $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} =$

b) $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}} =$

c) $\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} =$

d) $\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{18}} =$

e) $\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{6}{5}} =$

f) $\dfrac{\frac{8}{5}}{16} =$

10. Napíš zlomok, ktorý je o $\frac{1}{8}$ väčší ako je súčin zlomkov $\frac{5}{9}$ a $\frac{3}{2}$.

11. Vydeľ zlomky rovnakej farby. (Každá dvojica určuje dve úlohy.)

$\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{5}{2}, \frac{11}{3}, \frac{3}{7}, \frac{9}{10}, \frac{4}{9}, \frac{6}{7}$

ukážka:

Napr. $\frac{3}{4}, \frac{7}{8}$

a) $\frac{3}{4} : \frac{7}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{24}{28} = \frac{6}{7}$

b) $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$

ZMIEŠANÉ ČÍSLA

1. Vypočítaj.

a) $2 + \frac{2}{3} =$

b) $8 + \frac{3}{5} =$

c) $3 + \frac{4}{7} =$

d) $12 + \frac{5}{6} =$

e) $9 + \frac{2}{4} =$

f) $7 + \frac{1}{7} =$

g) $1 + \frac{2}{3} =$

h) $10 + \frac{4}{9} =$

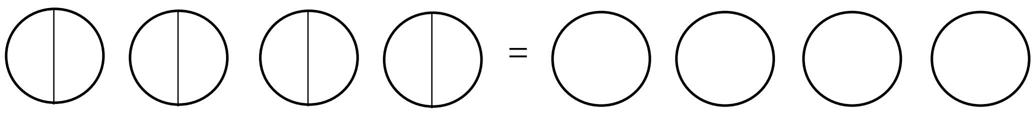
i) $5 + \frac{7}{8} =$

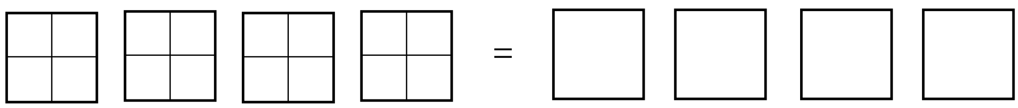
2. Zakrúžkuj zlomky, ktoré sú väčšie ako 1.

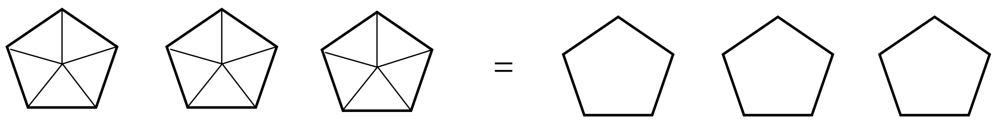
$\frac{1}{6}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{16}{5}$ $\frac{9}{6}$ $\frac{11}{10}$ $\frac{14}{14}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{13}{7}$ $\frac{25}{15}$ $\frac{3}{9}$ $\frac{7}{21}$ $\frac{15}{3}$ $\frac{7}{2}$ $\frac{0}{9}$ $\frac{7}{5}$ $\frac{1}{5}$

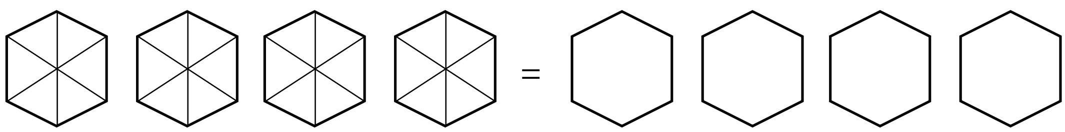
Zlomky, ktoré sú väčšie ako 1 nazývame .... zlomky.

3. Znázorni zlomky zafarbením na príslušnom modeli a zapíš ich ako zmiešané čísla.

$\frac{7}{2}$  $3\frac{1}{2}$

$\frac{13}{4}$ 

$\frac{11}{5}$ 

$\frac{21}{6}$ 

4. Zapíš nasledovné zlomky ako zmiešané čísla.

a) $\frac{14}{5} =$ b) $\frac{16}{3} =$ c) $\frac{38}{4} =$ d) $\frac{67}{9} =$

e) $\frac{29}{11} =$ h) $\frac{19}{8} =$ k) $\frac{51}{6} =$ n) $\frac{69}{4} =$

f) $\frac{58}{7} =$ i) $\frac{72}{12} =$ l) $\frac{79}{31} =$ o) $\frac{48}{20} =$

g) $\frac{25}{3} =$ j) $\frac{6}{5} =$ m) $\frac{35}{3} =$ p) $\frac{17}{9} =$

5. Zapíš zmiešané čísla ako zlomky v základnom tvare.

a) $3\frac{3}{4} =$ e) $11\frac{2}{4} =$ i) $7\frac{2}{4} =$ m) $8\frac{4}{6} =$

b) $4\frac{3}{5} =$ f) $14\frac{1}{2} =$ j) $6\frac{3}{12} =$ n) $1\frac{1}{6} =$

c) $5\frac{4}{8} =$ g) $9\frac{3}{7} =$ k) $3\frac{5}{4} =$ o) $13\frac{2}{3} =$

d) $1\frac{5}{6} =$ h) $18\frac{4}{5} =$ l) $10\frac{1}{8} =$ p) $2\frac{7}{8} =$

6. Vypočítaj a výsledný zlomok uprav na základný tvar.

a) $2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{5} =$ e) $14\frac{1}{2} - 4\frac{3}{5} =$

b) $1\frac{3}{5} + 3\frac{3}{4} =$ f) $7\frac{1}{6} - 5\frac{3}{4} =$

c) $10\frac{1}{8} + 2\frac{3}{5} =$ g) $8\frac{2}{7} - 3\frac{4}{5} =$

d) $4\frac{4}{9} + 7\frac{3}{7} =$ h) $12\frac{2}{3} - 5\frac{7}{10} =$

7. Zisti neznáme číslo ak vieš, že:

a) $\frac{1}{2}$ neznámeho čísla je 10 → neznáme číslo je

b) $\frac{7}{8}$ neznámeho čísla je 42 → neznáme číslo je

c) $\frac{1}{4}$ neznámeho čísla je $\frac{3}{8}$ → neznáme číslo je

d) $\frac{5}{6}$ neznámeho čísla je $\frac{7}{9}$ → neznáme číslo je

e) $\frac{4}{5}$ neznámeho čísla je $\frac{10}{15}$ → neznáme číslo je

f) $\frac{3}{8}$ neznámeho čísla je $\frac{9}{16}$ → neznáme číslo je

8. Vypočítaj a výsledný zlomok uprav na základný tvar.

a) $10 \cdot \frac{2}{1} =$

b) $42 \cdot \frac{8}{7} =$

c) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{1} =$

d) $\frac{7}{9} \cdot \frac{6}{5} =$

e) $\frac{10}{15} \cdot \frac{5}{4} =$

f) $\frac{9}{16} \cdot \frac{8}{3} =$

SLOVNÉ ÚLOHY SO ZLOMKAMI

1. **Mama upiekla 36 tvarohových koláčov. Milan zjedol $\frac{3}{9}$ z celkového počtu. Marcela zjedla $\frac{1}{8}$ zo zvyšku. Mama zjedla 4 koláče. Koľko koláčov zostalo pre otca?**

2. **Maroš dal pätinu autíčok zo svojej zbierky Tomášovi. Tomášovi tak pribudlo 18 autíčok. Koľko autíčok má teraz Maroš?**

3. **V Parku je 60 stromov. Listnaté stromy tvoria $\frac{2}{3}$ všetkých stromov. Z nich $\frac{3}{5}$ sú lipy, ostatné listnaté stromy sú brezy. Koľko je v parku briez a koľko líp?**

4. Kamaráti si kúpili rovnaké čokolády. Peter rozlomil čokoládu na päť rovnakých častí a dve z nich zjedol. Lukáš svoju čokoládu rozlomil na tri rovnaké časti a jednu časť zjedol. Kto zjedol menej čokolády?

5. Špagát, ktorý je 10 m dlhý treba rozstrihať na kusy dlhé $\frac{2}{3}$ m. Koľko takýchto kusov zo špagátu nastriháme?

6. Súrodenci Janka a Miško dostali balíček cukríkov. Janka zjedla $\frac{1}{3}$ zo všetkých cukríkov a Miško zjedol $\frac{3}{5}$ zo všetkých cukríkov.

a) Akú časť zo všetkých cukríkov zjedli spolu?

b) Aká časť cukríkov zostala v balíčku?

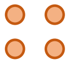
7. Aký objem má nádrž tvaru kvádra s rozmermi a = $\frac{1}{2}$ m, b = $\frac{3}{5}$ m, c = $\frac{7}{10}$ m?

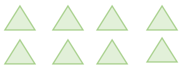
8. V štyroch po sebe idúcich týždňoch spálili v domácnosti nasledovné množstvo plynu: 1. týždeň: $6\frac{3}{4}$ m^3, 2. týždeň: $7\frac{1}{2}$ m^3, 3. týždeň: $5\frac{3}{8}$ m^3 a 4. týždeň: $7\frac{7}{8}$ m^3. Aká bola priemerná týždenná spotreba plynu?

9. Kuchyňa má rozlohu $10\frac{3}{4}$ m^2, spálňa a detská izba majú tvar obdĺžnika s rozmermi 4 m x $3\frac{1}{2}$ m, kúpeľňa má tvar štvorca so stranou $3\frac{3}{4}$ m, špajza má rozlohu $7\frac{1}{2}$ m^2. Aká je rozloha bytu v m^2 ?

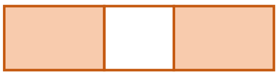
Niečo navyše

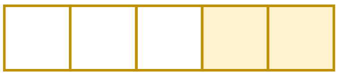
1. Vyrieš:

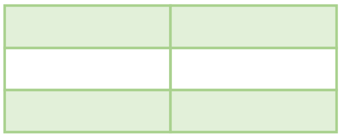
a) Ak  znázorňuje $\frac{2}{3}$ sady guľôčok, znázorni celú sadu .

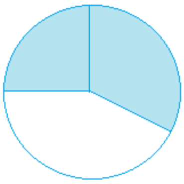
b) Ak  znázorňuje celok, znázorni $\frac{5}{4}$ celku .

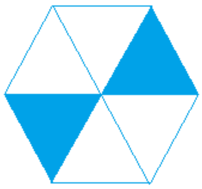
2. Zakrúžkuj obrázky, ktoré znázorňujú $\frac{2}{3}$ celku.





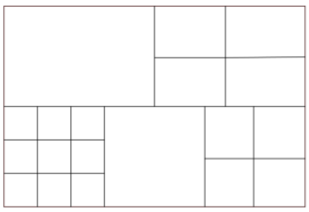


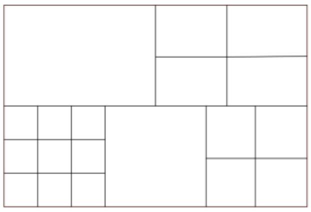


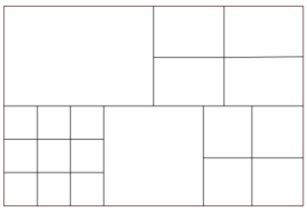


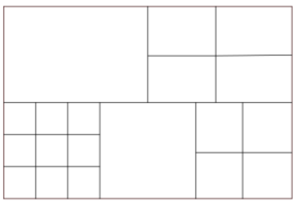
3. Zafarbi časť obdĺžnika, ktorá reprezentuje nasledovnú časť celku:

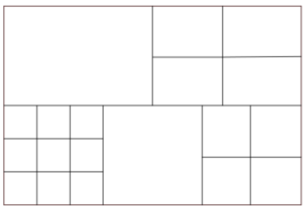
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{18}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{12}$

a) 

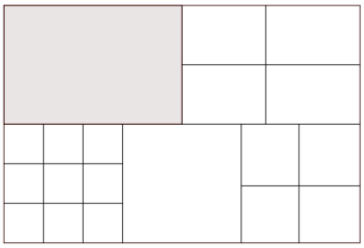
b) 

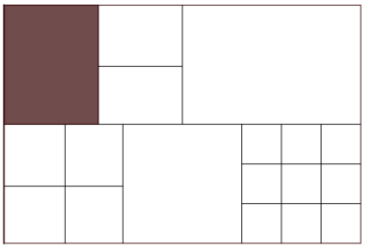
c) 

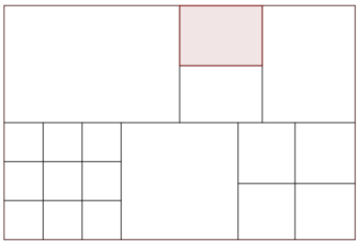
d) 

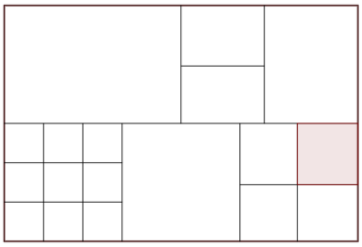
e) 

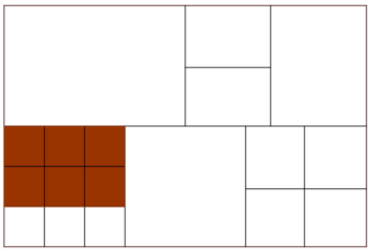
4. Zapíš zlomkom, akú časť celku tvorí zafarbená časť obrázka.

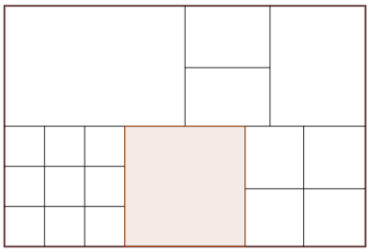
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

5. Rozdeľ každý z obrázkov na uvedené časti:

a) tretiny

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

b) štvrtiny

★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★

c) pätiny

❀ ❀ ❀ ❀ ❀
❀ ❀ ❀ ❀ ❀
❀ ❀ ❀ ❀ ❀
❀ ❀ ❀ ❀ ❀

d) devätiny

☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺

e) šestiny

★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★
★ ★ ★ ★

f) desatiny

❀ ❀ ❀ ❀ ❀
❀ ❀ ❀ ❀ ❀
❀ ❀ ❀ ❀ ❀
❀ ❀ ❀ ❀ ❀

6. Rieš slovnú úlohu.

Janko a Marienka pripravujú na oslavu džús zmiešaním pomarančovej šťavy a vody. Ktorý z džúsov bude podľa receptu viac „pomarančový“ ?

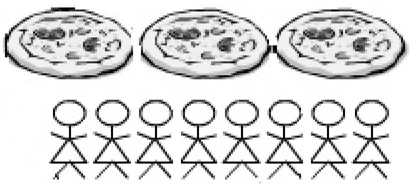
Jankov recept: *Dva poháre pomarančovej šťavy a päť pohárov vody.*

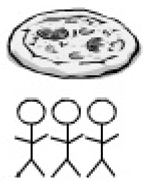
Marienkin recept: Š*tyri poháre pomarančovej šťavy a osem pohárov vody.*

Riešenie:

7. Rieš slovnú úlohu.

Kto dostane viac pizze, jeden chlapec alebo jedno dievča?





Riešenie:

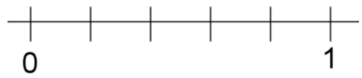
8. Rieš slovnú úlohu.

Dvanásť ľudí si objednalo pizzu. Každá z osôb dostala $\frac{2}{3}$ syrovej pizze a $\frac{1}{4}$ hríbovej pizze. Aká bola celková objednávka?

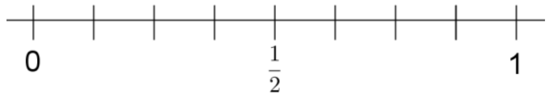
Riešenie:

9. Znázorni zlomky na číselnej osi:

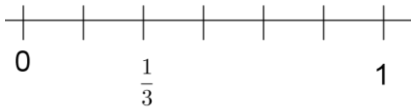
$a)\ \frac{3}{5}$



$b)\ \frac{3}{4}$

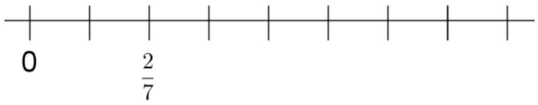


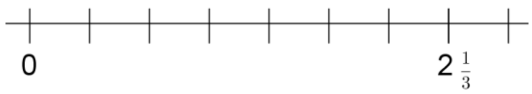
$c)\ \frac{2}{3}$



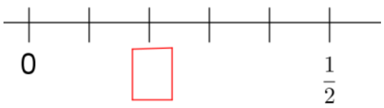
$d)\ \frac{7}{6}$

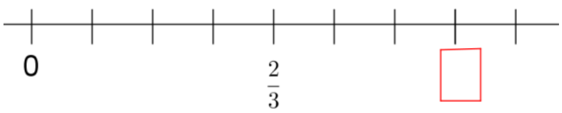
10. Znázorni na číselnej osi číslo 1.





11. Doplň číslo do okienka na číselnej osi.





12. Nájdite zlomok, ktorý sa nachádza medzi zlomkami $\frac{1}{9}$ a $\frac{1}{8}$.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

BEHR, M., LESH, R., POST, T., SILVER E., 1983. Rational Number Concepts. In: R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press, s. 91-125.

BEHR, M., WACHSMUTH, I., POST, T., LESH, R., 1984. Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Matjematics Education.* 15(5), 323 – 341.

DIVÍŠEK, J. a kol., 1989. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. st. ZŠ*. Praha: SPN. 269 s. ISBN 80-04-20433-3.

ENGLISH, L.D., HALFORD, G.S., 1995, *Mathematucs Education: Models and Processes.* New York: Routledge. ISBN: 9780805814576.

HEJNÝ, M., 1987. *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN. 553 s. ISBN 80-08-01344-3.

HEJNÝ, M., NOVOTNÁ, J., STEHLÍKOVÁ, N., 2004. *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: PedF UK. 455 s. ISBN 80-7290-189-3.

CHARALAMBOUS, Y. CH., PITTA-PANTAZI, D., 2006. Drawing On a Theoretical Model To Study Students´ Understandings Of Fractions. *Educational Studies in Mathematics.* roč. 64, s. 293–316. ISSN: 1573-0816.

KIEREN, T., 1976. On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Nmbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC. s. 101 – 105.

KIEREN, T., 1980. *Recent Research On Number Learning*. Columbus, Ohio: Clearinhouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. 175 s.

LAMON, S., 1999. *Teaching Fractions and Ratios for Understanding.* London: Erlbaum. 280 s. ISBN 978-08-058-5210-3.

LAMON, S., 2012. *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. New York: Routledge. 281 s. ISBN 978-0-415-88612-5.

MARSHALL, S. P. 1993. Assessment of rational number understanding: A schema – based approach. In Carpenter, T. P., Fennema, E. and Romberg, T. A. (Eds.): *Rational Numbers: An integration of research*. New York: Routledge, 396 s. ISBN: 9780203052624

NUNES, T. et al. 2004. *Vergaunds´ definition of concepts as a framework for research and teaching*. Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Developpement des Compétences: Paris.

PETIT, M., LAIRD, R., MARSDEN, E., EBBY, C., 2016. *A Focus on Fractions. Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge. 220 s. ISBN: 978-1-138-81644-2.

SMITH, J. P., 2002. The development of students' knowledge of fractions and ratios. In Litwiller , B. and Bright G. (Eds.) *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. Reston: Virginia, NCTM, s. 3-17. ISBN-0-87353-519-7.

ŠEDIVÝ, O., 1990. *Didaktika matematiky pre štúdium učiteľstva 1. stupňa ZŠ*. Bratislava: SPN. ISBN 80-08-00378-2.

ŠVECOVÁ, V., PAVLOVIČOVÁ, G., RYBANSKÝ, Ľ., KLIMENTOVÁ, L., 2017. *Reifikácia zlomkov vo vzťahu k osobnej potrebe štruktúry*. Praha: Wolters Kluwer. 140 s. ISBN 978-80-7552-536-9.

Autori: doc. PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
Mgr. Oľga Kupcová
PaedDr. Lucia Vargová, PhD.

Názov: **Názornosť a modelovanie vo vyučovaní zlomkov**
Vydavateľ: Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Edícia: Prírodovedec č. 730
Obrázok na obálke: Bc. Simona Gogolová
Rok vydania: 2020
Poradie vydania: prvé vydanie
Počet strán titulu: 100 strán
Počet výtlačkov: 200 kusov

ISBN 978-80-558-1638-8
EAN 9788055816388